Analysis I

Tomáš Dohnal
tomas.dohnal@mathematik.uni-halle.de
Wintersemester 2018-19, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

13. September 2019

- Skript in Bearbeitung; Fehler (auch Tippfehler) melden Sie, bitte, auf meine Email-Adresse -

Inhaltsverzeichnis

Dieses ist kein vollständiges Skript. Es werden in der Regel nur die Definitionen und Sätze (Aussagen) getippt. Beweise, Beispiele, Erklärungen und Kommentare werden in der Vorlesung geliefert. Bei Bedarf können diese natürlich auch in der Literatur gefunden werden.

Die Hauptreferenz dieser Vorlesung ist [4]. Es werden aber viele andere Quellen benutzt, wie z.B. [3], [5] oder [1]. Dieses Skript folgt an mehreren Stellen dem Skript zu Analysis I von Matthias Röger, TU Dortmund.

1 Aussagenlogik, Mengenlehre, Abbildungen und Beweistechniken

Mathematik ist die Gewinnung von neuen wahren Aussagen aus alten wahren Ausagen. Mathematische Aussagen werden in der Form vom *Theorem, Satz, Proposition, Behauptung, Lemma* oder *Korrolar* formuliert. Diese müssen <u>bewiesen</u> werden. Es gibt aber ein paar grundlegende Aussagen (Grundvoraussetzungen), die nicht bewiesen werden, s.g. *Axiome.* Diese werden als wahr vorausgesetzt. Als Beispiele erwähnen wir folgende zwei Peano-Axiome: 0 ist eine Zahl; jede natürliche Zahl hat genau einen Nachfolger. Mathematische Begriffe werden mit Hilfe von Definitionen eingeführt. Hier wird oft das Symbol „:=“ benutzt, z.B.

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Wir werden das Ende von jedem Beweis mit dem Symbol $\square$ markieren. Andere Mathematiker verwenden z.B. „q.e.d.“ (quod erat demonstrandum).

Mathematische Aussagen haben den Wahrheitswert 0 oder 1. Beispiele von wahren Aussagen sind

1. $1 + 2 = 3$
2. 29 ist eine Primzahl
3. 5 teilt 17 oder $0 \cdot 3 = 0$
4. 5 teilt 15 oder $0 \cdot 3 = 0$

Aussage 3 ist wahr, da $0 \cdot 3 = 0$. Aussage 4 ist wahr, da ein „oder“ in der Mathematik kein ausschließendes oder ist.

1.1 Logische Operationen

<u>1) Folgerung/Implikation</u>

- $A \Rightarrow B$ heißt „aus der Aussage A folgt Aussage B“.
- Die Aussage $(A \Rightarrow B)$ wird als wahr bezeichnet, falls B wahr ist oder A falsch ist.

Es heißt, dass wir bei einer nicht wahren Voraussetzung A beliebiges B (wahr oder falsch) behaupten können. Die ganze Aussage $(A \Rightarrow B)$ ist dabei wahr. Also sind folgende Beispiele wahre Aussagen:

1. $x^2 < 5, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \leq 2$
2. $1 + 1 = 2 \Rightarrow \sqrt{9} = 3$
3. $1 + 1 = 3 \Rightarrow 1 + 1 = 0$
4. $1 + 1 = 3 \Rightarrow 1 + 1 = 2$

5. $1+1=3 \Rightarrow$ die Summe von zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist eine ungerade Zahl

Wir bemerken, dass bei der mathematischen Folgerung kein kausaler Zusammenhang bestehen muss. Bei den meisten nützlichen Anwendungen von $\Rightarrow$ besteht er aber doch. Oben kann man nur Beispiel 1 als „nützlich" bezeichnen.

2) Äquivalenz

- $A \Leftrightarrow B$ heißt $(A \Rightarrow B)$ und $(B \Rightarrow A)$, d.h. A gilt *genau dann, wenn* B gilt, d.h. die Aussagen A und B sind äquivalent.

Beispiele wahrer Äquivalenzaussagen sind

1. $x^2 < 5, x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$
2. $0 = 1 \Leftrightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$
3. $|-3| = 3 \Leftrightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Nur Beispiel 1 kann als „nützlich" bezeichnet werden.

3) Negation

$\neg A$ bezeichnet die Negation der Aussage A. Falls A wahr ist, ist $\neg A$ falsch und umgekehrt.

Als Beispiel sei $A=$ „$n \in \mathbb{N}$ ist gerade". Dann ist $\neg A=$"$n \notin \mathbb{N}$ oder $n \in \mathbb{N}$ ist ungerade".

Es ist hilfreich sich die Werte in der folgenden Wahrsheitstabelle zu überlegen

A	B	$\neg A$	A und B	A oder B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Proposition 1.1 Es gilt für beliebige Aussagen A und B

$$(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A \text{ oder } B) \;\Leftrightarrow\; (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Beweis. Die erste Äquivalenz folgt aus der Definition der Implikation. Die zweite Äquivalenz zeigen wir mit Hilfe der Wahrheitstabelle

A	B	$\neg A$ oder B	$\neg B \Rightarrow \neg A$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Die letzten zwei Spalten sind offensichtlich identisch. □

1.2 Mengenlehre

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten (Elementen). Die leere Menge wird als $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet. Wir kennen schon

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ (Menge der natürlichen Zahlen),
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ (Menge der ganzen Zahlen).

Wir definieren noch

- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$.

Folgende Begriffe brauchen wir:

- *Vereinigung* von Mengen M, N ist $M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$
- *Schnitt* von Mengen M, N ist $M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$
- *Differenz* von Mengen M, N ist $M \setminus N := \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}$
- M ist eine *Teilmenge* der Menge N, d.h. $M \subset N$, genau dann wenn $(x \in M \Rightarrow x \in N)$
- M und N sind *disjunkt*, falls $M \cap N = \emptyset$
- Das *Komplement* einer Teilmenge $M \subset N$ ist $M^c := N \setminus M$.
- Das *kartesische Produkt* $M \times N$ zweier Mengen M und N ist die Menge aller Paare (x, y), wobei $x \in M$ und $y \in N$ ist.

Proposition 1.2 Seien A, B, C beliebige Mengen. Es gilt

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Quantoren

Um die Notation kurz zu halten, benutzt man bei der Arbeit mit Mengen spezielle Symbole, s.g. *Quantoren*.

- *Allquantor*: $\forall$ heißt „für jedes“

  $$\text{zum Beispiel: } \forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq n,$$

  d.h.: „für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $n^2 \geq n$“.

- *Existenzquantor*: $\exists$ heißt „es existiert“

  $$\text{zum Beispiel: } \exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 4$$

  d.h.: „es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $n^2 = 4$“.

- ein Beispiel mit beiden Quantoren (wobei $\mathbb{R}$ erst später definiert wird):

  $$\forall y \geq 0 \ \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = y$$

  d.h.: „für jedes $y \geq 0$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $x^2 = y$“.

1.3 Abbildungen

Definition. Seien X, Y beliebige Mengen. Eine *Abbildung* (oder *Funktion*) $f : X \to Y$ ist eine Zuordnung, die jedem $x \in X$ genau ein $y = f(x) \in Y$ zuordnet. Wir schreiben

$$f : X \to Y, x \mapsto f(x).$$

X heißt der *Definitionsbereich* und Y die *Zielmenge*. Die Menge der tatsächlich angenomennen Werte $f(X) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ für ein } x \in X\}$ heißt das Bild von f.

1.4 Beweistechniken

Wir besprechen die drei wichtigsten Beweistechniken: direkter Beweis, Widerspruchsbeweis und vollständige Induktion.

1) direkter Beweis (einer Aussage A)

$$\text{Voraussetzung (und bekannte wahre Aussagen)} \ \rightarrow \ \text{logische Folgerungen} \rightarrow \ \text{Aussage } A$$

Behauptung. Das Quadrat jeder ungeraden Zahl ist ungerade.

Beweis. Sei n eine ungerade Zahl, also $n = 2k + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

- $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
- $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ n^2$ ist ungerade

□

2) indirekter Beweis / Widerspruchsbeweis (einer Aussage A)

$\neg A$ (und bekannte wahre Aussagen) $\rightarrow$ logische Folgerungen $\rightarrow$ $\neg B$, wobei B eine bekannte wahre Aussage

Also man zeigt, dass $(\neg A \ \Rightarrow \neg B)$ gilt. Dies ist nach Prop. 1.1 äquivalent zur Wahrheit von $(B \Rightarrow A)$. Da B wahr ist, muss auch A wahr sein. Anders gesehen, unter der Voraussetzung $\neg A$ bekommen wir nach der Verwendung von logischen Schlussfolgerungen und anderen wahren Aussagen den Widerspruch mit einer bekannten wahren Aussage B. Deswegen muss also die Vorassetzung falsch sein.

Behauptung. In einem rechtwinkligen Dreieck mit Kathetenlängen $a, b > 0$ und Hypotenusenlänge $c > 0$ gilt $a + b > c$.

Beweis. Sei $a + b \leq c$.

$$\Rightarrow (a+b)^2 \leq c^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq c^2 \overset{\text{Pythagoras}}{\Leftrightarrow} c^2 + 2ab \leq c^2 \Leftrightarrow 2ab \leq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch mit $a, b > 0$. □

3) vollständige Induktion

Hier ist die Aufgabe eine Aussage $A(n)$ für jedes $n \geq n_0$, wobei $n_0 \in \mathbb{Z}$ fest ist und $n \in \mathbb{Z}$ frei ist, zu beweisen. Als Beispiel will man Zeigen, dass $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hier ist also $n_0 = 1$ und $A(n) =$ „$1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$“.

Das Vorgehen der vollständigen Induktion ist zu zeigen:

I.0 (Induktionsanfang) $A(n_0)$ ist wahr

I.1 (Induktionsschritt) Für ein beliebiges $n \geq n_0$ gilt:

$$\text{Falls} \quad \underbrace{A(n) \text{ wahr}}_{\text{Induktionsvoraussetzung (I.V.)}} \quad \text{ist, so ist auch } A(n+1) \text{ wahr.}$$

Dies ist hinreichend, da

$A(n_0)$ gilt nach I.0 $\Rightarrow$ $A(n_0+1)$ gilt nach I.1 (mit $n = n_0$) $\Rightarrow$ $A(n_0+2)$ gilt nach I.1 (mit $n = n_0+1$) usw.

Behauptung. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$S(n) := 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Induktionsanfang: $S(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (gilt offensichtlich)

Induktionsschritt: Zeige, dass für beliebiges $n \geq n_0$ die Implikation

$$\underbrace{S(n) = \frac{n(n+1)}{2}}_{\text{I.V.}} \Rightarrow S(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

wahr ist. Tatsächlich gilt

$$S(n+1) = S(n) + n + 1 \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

□

1.5 Binomischer Lehrsatz

Als Anwendung der vollständigen Induktion beweisen wir im nächsten den binomischen Lehrsatz und die Summe der geometrischen Reihe.

Definition. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $k! := 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k$ die *Fakultät* von k. Wir setzen $0! := 1$.

Satz 1.3 (Bedeutung der Fakultät) Es ist $n!$ die Anzahl der möglichen Anordnungen (Permutationen) einer Menge aus n Elementen.

Definition. Für $n, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$ ist

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Für $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$ oder $k > n$ setzt man $\binom{n}{k} := 0$. $\binom{n}{k}$ heißt der *Binomialkoeffizient.*

Lemma 1.4 Es gilt für alle $n, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$

(i) $\binom{n}{1} = n$

(ii) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

(iii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Bemerkung. Aus Lemma 1.4 (i) folgt $\binom{n}{0} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Lemma 1.5 Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Satz 1.6 (Kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten) Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist gleich $\binom{n}{k}$.

Bemerkung. *Summenzeichen und Produktzeichen*: Für ganze Zahlen $m \leq n$ und reelle Zahlen a_k mit $m \leq k \leq n$ ist

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n, \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \cdots \cdot a_n.$$

Für $m > n$ setzt man $\sum_{k=m}^{n} a_k := 0, \prod_{k=m}^{n} a_k := 1$.

Zum Beispiel; $1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$, $a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \sum_{k=1}^{n} a^k$ und $n! = \Pi_{k=1}^{n} k$.

Satz 1.7 (Binomischer Lehrsatz) Seien x, y reelle Zahlen und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Die Koeffizienten in der binomischen Formel kann man im *Pascalschen Dreieck* darstellen. Wegen Lemma 1.5 ist jede Zahl im Inneren des Dreiecks die Summe der beiden unmittelbar über ihr stehenden.

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Satz 1.8 (Geometrische Reihe) Seien $x \neq 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

2 Die Reellen Zahlen, das Supremum und Infimum

2.1 Körper, Vollständigkeit, reelle Zahlen

Die reellene Zahlen sind die wichtigsten Zahlen für die mathematische Analysis. Aus der Schule wissen Sie, dass man reelle Zahlen mit Punkten auf der Zahlengerade identifizieren kann und dass *jeder* Punkt auf der Gerade zu einer Zahl gehört. Diese Definition ist zwar anschaulich aber nicht sehr praktisch, da man nicht sofort alle Eigenschaften der reellen Zahlen, die man für die Analysis braucht, erkennt.

Wir führen reelle Zahlen axiomatisch ein - ein Zugang nach Hilbert.

Definition. Ein *Körper* ist ein Tripel $(\mathcal{K}, +, \cdot)$, wobei $\mathcal{K}$ eine Menge und $+, \cdot$ Abbildungen von $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}$ sind, der die Eigenschaften I-III efüllt. $+$ und $\cdot$ werden Addition und Multiplikation genannt. Wir schreiben

$$(a, b) \mapsto a + b, (a, b) \mapsto a \cdot b = ab.$$

I. Addition

(A.1) Assoziativgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathcal{K}$ gilt

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

(A.2) Kommutativgesetz: Für alle $x, y \in \mathcal{K}$ gilt

$$x + y = y + x.$$

(A.3) Existenz der Null: Es gibt eine Zahl $0 \in \mathcal{K}$, so dass

$$x + 0 = x \text{ für alle } x \in \mathcal{K}.$$

(A.4) Existenz des Negativen: Zu jedem $x \in \mathcal{K}$ existiert eine Zahl $-x \in \mathcal{K}$, so dass

$$x + (-x) = 0.$$

Bemerkung. Für $x, y \in \mathcal{K}$ schreiben wir $x - y := x + (-y)$.

II. Multiplikation

(M.1) Assoziativgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathcal{K}$ gilt

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(M.2) Kommutativgesetz: Für alle $x, y \in \mathcal{K}$ gilt

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(M.3) Existenz der Eins: Es gibt ein Element $1 \in \mathcal{K}, 1 \neq 0$, so dass

$$x \cdot 1 = x \text{ für alle } x \in \mathcal{K}.$$

(M.4) Existenz des Inversen: Zu jedem $x \in \mathcal{K}$ mit $x \neq 0$ gibt es ein $x^{-1} \in \mathcal{K}$, so dass $x \cdot x^{-1} = 1$.

III. Distributivgesetz

(D) Für alle $x, y, z \in \mathcal{K}$ gilt

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Definition. Ein *geordneter Körper* ist ein Körper $\mathcal{K}$ zusammen mit einer Relation $>$, die die Eigenschaft IV erfüllen.

IV. Ordnung

In $\mathcal{K}$ können gewisse Elemente als positiv ausgezeichnet (Schreibweise $x > 0$), so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(O.1) Trichotomie: Für jedes x gilt genau eine der drei Beziehungen

$$x > 0, x = 0, -x > 0.$$

(O.2) Abgeschlossenheit gegenüber Addition.

$$x > 0 \text{ und } y > 0 \Rightarrow x + y > 0.$$

(O.3) Abgeschlossenheit gegenüber Multiplikation.

$$x > 0 \text{ und } y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0.$$

Definition. Man definiert für x, y in einem geordeneten Körper $\mathcal{K}$:

- $x > y$ heißt $x - y > 0$
- $x < y$ heißt $y > x$
- $x \geq y$ heißt $x > y$ oder $x - y = 0$
- $x \leq y$ heißt $x < y$ oder $x - y = 0$

Bemerkung. Man kann anhand der obigen Eigenschaften alle Rechenregeln für die Addition, Multiplikation und für Ungleichungen, wie zum Beispiel:

- $-0 = 0$,
- $-(-x) = x$,
- $x \cdot 0 = 0$,
- $(x^{-1})^{-1} = x$ falls $x \neq 0$,
- $x - y = 0$ ist äquivalent zu $x = y$,
- $x < y \;\Rightarrow\; -y > -y$

zeigen (Übung).

Definition. Sei $\mathcal{K}$ ein geordneter Körper und $M \subset \mathcal{K}$. M heißt *nach oben beschränkt*, falls es ein $s \in \mathcal{K}$ gibt, sodass $x \leq s$ für alle $x \in M$. s heißt eine *obere Schranke* von M.

Definition. m_0 ist *ein Maximum* von M, falls $m_0 \in M$ und m_0 eine obere Schranke zu M ist, d.h. $x \leq m_0$ für alle $x \in M$.

Behauptung. Wenn ein Maximum m_0 von M existiert, so ist es eindeutig. Man schreibt dann $m_0 = \max(M)$.

Beweis. Sei m_0' ein weiteres Maximum. Dann gilt $m_0 \leq m_0'$ und auch $m_0' \leq m_0$, also zusammen $m_0 = m_0'$. $\square$

Bemerkung. Eine *nach unten beschränkte* Menge, eine *untere Schranke* und das *Minimum* definiert man analog.

Definition. Ein *(Dedekind-)vollständiger Körper* ist ein geordneter Körper $\mathcal{K}$, der die Eigenschaft V erfüllt.

V. Vollständigkeit (Dedekind-Vollständigkeit)

(V) Jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge von $\mathcal{K}$ hat ein Supremum.

Definition. Sei $\mathcal{K}$ ein geordneter Körper und $M \subset \mathcal{K}$. $s \in \mathcal{K}$ heißt ein *Supremum von* M, falls

(i) $x \leq s \ \forall x \in M$,

(ii) $(\exists t \in \mathcal{K} : x \leq t \ \forall x \in M) \Rightarrow s \leq t$.

Axiom. Es gibt einen vollständigen, geordneten Körper, bezeichnet mit $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. $\mathbb{R}$ heißt die Menge der *reellen Zahlen*.

Bemerkung. 1) Es kann gezeigt werden, dass es „im wesentlichen" nur $\mathbb{R}$ als einen vollständigen geordneten Körper gibt. Genauer: $\mathbb{R}$ ist bis auf Isomorphie der einzige Dedekind-vollständige geordnete Körper, siehe Appendix A in [3].

2) Die obige Einführung der reellen Zahlen ist nicht konstruktiv. Ihre Existenz wird anhand des obigen Axioms einfach vorausgesetzt. Es gibt aber einen anderen (eleganteren und vor allem konstruktiven) Zugang. Hier werden nur die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als („vom Gott") gegeben betrachtet. Aus $\mathbb{N}$ werden erst die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die rationalen zahlen $\mathbb{Q}$ konstruiert. Danach werden die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, mit Hilfe der Technik der s.g. Dedekindschen Schnitte, konstruiert, siehe Abschnitte 5, 9 und 10 in [2]. Anschließend kann man zeigen, dass diese so konstruierte Menge $\mathbb{R}$ die obigen Eigenschaften I-V erfüllt, d.h. sie ist ein vollständiger, geordneter Körper.

Satz 2.1 Hat eine Teilmenge M von einem geordneten Körper $\mathcal{K}$ ein Supremum, dann ist dieses eindeutig bestimmt. Es wird mit $\sup(M)$ bezeichnet.

Das Supremum ist also **die** kleinste obere Schranke. Analog definiert man die größte untere Schranke: das Infimum.

Definition. Sei $\mathcal{K}$ ein geordneter Körper und $M \subset \mathcal{K}$. r heißt ein *Infimum von* M, falls

(i) $x \geq r \ \forall x \in M$,

(ii) $(\exists t \in \mathcal{K} : x \geq t \ \forall x \in M) \Rightarrow t \leq r$.

Notation: $r = \inf M$. (das Infimum ist eindeutig, falls es existiert - genauso wie das Supremum)

Satz 2.2 Für jede nach unten beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ existiert $\inf(M)$.

Bemerkung. 1) Offenbar, falls für ein $M \subset \mathbb{R}$ das Maximum $\max M$ existiert, dann gilt

$$\sup M = \max M.$$

Analog, falls das Minimum existiert, dann gilt

$$\inf M = \min M.$$

2) Für eine nach oben unbeschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\sup(M) = \infty$$

und für eine nach unten unbeschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\inf(M) = -\infty.$$

Bemerkung. Die *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ sind kein Körper, da sie (A.3), (A.4), (M.4) nicht erfüllen.

Die *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ erfüllen zwar (A.3) und (A.4) aber nicht (M.4). Also sind sie auch kein Körper.

Die *rationalen Zahlen*

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, p \text{ und } q \text{ teilerfremd} \right\}$$

sind ein geordneter Körper. Sie sind aber nicht vollständig, wie wir in Proposition 2.6 Zeigen.

Anhand der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ kann gezeigt werden, dass $\mathbb{N}$ unbeschränkt ist (bezüglich der Ordnung aus $\mathbb{R}$). Dies heißt Archimedisches Prinzip.

Satz 2.3 (Archimedisches Prinzip) . Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist nicht beschränkt, d.h. für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $n > x$.

Korollar 2.4 Zu jedem $\varepsilon \in (0, \infty)$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Proposition 2.5 Es gibt keine Zahl $x \in \mathbb{Q}$, für die $x^2 = 2$.

Dieses Lemma besagt, dass $\sqrt{2}$ eine *irrationale* Zahl ist.

Proposition 2.6 $\mathbb{Q}$ erfüllt nicht die Dedekind-Vollständigkeit (V).

2.2 Intervalle in $\mathbb{R}$

Wir definieren: a) Abgeschlossenes Intervall. Seien $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$. Dann setzt man

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

b) Offenes Intervall. Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Man setzt

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

c) Halboffenes Intervall. Für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ist

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad (a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

d) Uneigentliche Intervalle. Sei $a \in \mathbb{R}$. Man definiert

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \quad (a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \quad (-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}.$$

Bemerkung. Aus der Definiton vom Maximum, Supremum, Minimum und Infimum folgern wir:

Für ein abgeschlossenes Intervall $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\sup(I) = \max(I) = b, \ \inf(I) = \min(I) = a.$$

Für ein offenes Intervall $I := (a, b) \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\sup(I) = b,\ \inf(I) = a,$$

aber weder das Maximum noch das Minimum von I existiert. Für ein uneigentliches Intervall $I := (a, \infty) \subset \mathbb{R}$ ist

$$\inf(I) = a, \quad \sup(I) = \infty,$$

aber weder das Maximum noch das Minimum von I existiert.

Die entsprechenden Aussagen für anedere Typen von Intervallen sind dann klar.

2.3 Der Absolut-Betrag

Definition. Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren den *(Absolut-)Betrag* von x als

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Satz 2.7 Seien $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt $|x| \geq 0$ und

$$|x| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0 \quad \text{(Definitheit)},$$

$$|xy| = |x||y| \quad \text{(Multiplikativität)},$$
$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{(Dreiecksungleichung)}.$$

3 Folgen, Konvergenz, Grenzwerte

3.1 Folgen und Konvergenzeigenschaften

Definition. Eine *Folge* reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Jedem $n \in \mathbb{N}$ wird also ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Wir schreiben

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ oder } (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

oder kurz $(a_n)_n$ oder sogar nur (a_n). Um klar zu machen, dass es eine Folge in $\mathbb{R}$ ist, schreiben wir oft $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$.

Die Zahlen a_n heißen *Glieder* der Folge (a_n).

Definition. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt *konvergent* gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Falls (a_n) gegen a konvergiert, so nennt man a den *Grenzwert* oder den *Limes* der Folge und schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

oder kurz $\lim a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Definition. Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, nennt man *Nullfolge*.

Bemerkung. Geometrisch bedeutet $\lim a_n = a$, dass in jeder noch so kleinen $\varepsilon-$Umgebung $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ von a (mit $\varepsilon > 0$) fast alle Glieder der Folge liegen. Genauer sind es alle bis auf endlich viele.

Definition. Eine nicht konvergente Folge heißt *divergent*.

Definition. Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt *divergent gegen* ∞ (bzw. $-\infty$), wenn zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$a_n > K \quad (\text{bzw. } a_n < K)\ \forall n \geq N.$$

Wir schreiben $\lim a_n = \infty$ oder $a_n \to \infty$ (bzw. $\lim a_n = -\infty$ oder $a_n \to -\infty$).

Satz 3.1 (Reziprokes einer gegen $\pm\infty$ divergenten Folge) Falls die Folge (a_n) divergent gegen ∞ oder $-\infty$ ist, dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \neq 0\ \forall n \geq n_0$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Satz 3.2 (Reziprokes einer Nullfolge) Sei (a_n) eine Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle $n \geq n_0$ (bzw. $a_n < 0$ für alle $n \geq n_0$) mit einem $n_0 \in \mathbb{N}$. Dann divergiert die Folge $(1/a_n)$ gegen ∞ (bzw. gegen $-\infty$).

Trotz der nicht-Vollständigkeit von $\mathbb{Q}$ liegt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, d.h. jede reelle Zahl kann beliebig gut mit einer Folge rationaler Zahlen approximiert werden:

Satz 3.3 $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, d.h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Folge rationaler Zahlen (r_n), die gegen x konvergiert.

Definition. Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls es ein $M \geq 0$ gibt, sodass

$$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sie heißt *nach oben (bzw. unten) beschränkt*, falls es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$a_n \leq K \text{ (bzw. } a_n \geq K) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Satz 3.4 Jede konvergente Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt.

Bemerkung.
- Satz 3.4 ist offenbar äquivalent zu:

  Jede unbeschränkte Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ist divergent.

- Es gilt **nicht**, dass jede beschränkte Folge konvergent wäre. Zum Beispiel, die Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt aber divergent.

Satz 3.5 (Eindeutigkeit des Limes) Falls eine Folge (a_n) gegen a und b konvergiert, dann ist $a = b$.

Satz 3.6 (Summe und Produkt konvergenter Folgen) Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen reeller Zahlen. Dann konvergieren auch die Summenfolge $(a_n + b_n)$ und die Produktfolge $(a_n b_n)$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$

Satz 3.7 (Quotient konvergenter Folgen) Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen reeller Zahlen mit $\lim b_n \neq 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und die Quotientenfolge $(a_n/b_n)_{n\geq n_0}$ konvergiert. Für ihren Grenzwert gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

Satz 3.8 (Größenvergleich) Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen reeller Zahlen und für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gelte $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

Definition. Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt

i) *monoton wachsend*, falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

ii) *streng monoton wachsend*, falls $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

iii) *monoton fallend*, falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

iv) *streng monoton fallend*, falls $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

v) *monoton*, falls sie monoton wachsend oder monoton fallend ist,

vi) *streng monoton*, falls sie streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

Satz 3.9 Jede beschränkte monotone Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ konvergiert. Jede unbeschränkte monotone Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ divergiert gegen $\pm\infty$.

3.2 Cauchy-Folgen

Definition. Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m, n \geq n_0$ gilt

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

In einer Cauchy-Folge werden also die Abstände der Folgenglieder untereinander mit wachsendem Index beliebig klein.

Satz 3.10 (i) Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

(ii) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

(iii) Jede Cauchy-Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ konvergiert in $\mathbb{R}$.

(iv) In $\mathbb{Q}$ gibt es Cauchy-Folgen, die in $\mathbb{Q}$ nicht konvergieren, d.h., deren Grenzwert nicht in $\mathbb{Q}$ liegt.

Definition. Ein angeordneter Körper $\mathcal{K}$ heißt *folgenvollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in $\mathcal{K}$ konvergiert.

Bemerkung.
- Satz 3.10 sagt also, dass $\mathbb{R}$ folgenvollständig während $\mathbb{Q}$ nicht folgenvollständig sind.
- Es gilt, dass ein angeordneter Körper genau dann Dedekind-vollständig ist, wenn er folgenvollständig ist und das archimedische Prinzip erfüllt. Einen Beweis findet man im Appendix B von [3]. Wir hätten also reelle Zahlen einführen können als den geordneten Körper, der folgenvollständig und archimedisch ist.

3.3 Teilfolgen, Häufungspunkte, Limes superior, Limes inferior

Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ eine *Teilfolge* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz 3.11 (Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Definition. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* einer Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$, falls es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert.

Bemerkung. Falls (a_n) konvergiert, dann ist $a := \lim a_n$ der einzige Häufungspunkt.

Definition. Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Wir definieren den *Limes superior* und *Limes inferior* von (a_n):

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}(\sup\{a_k : k \geq n\}), \ \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}(\inf\{a_k : k \geq n\}).$$

Bemerkung. Die Folge $(\sup\{a_k : k \geq n\})_n$ ist entweder monoton fallend (falls $(a_n)_n$ nach oben beschränkt) oder identisch ∞ (falls $(a_n)_n$ nach oben unbeschränkt). Die Folge $(\inf\{a_k : k \geq n\})_n$ ist entweder monoton wachsend (falls $(a_n)_n$ nach unten beschränkt) oder identisch $-\infty$ (falls $(a_n)_n$ nach unten unbeschränkt).

Wir haben also

$$\limsup a_n = \begin{cases} \overline{a} \in \mathbb{R}, \text{ falls } (\sup\{a_k : k \geq n\})_n \text{ beschränkt,} \\ -\infty, \text{ falls } (\sup\{a_k : k \geq n\})_n \text{ unbeschränkt und } (a_n) \text{ nach oben beschränkt,} \\ \infty, \text{ falls } (a_n) \text{ nach oben unbeschränkt.} \end{cases}$$

$$\liminf a_n = \begin{cases} \underline{a} \in \mathbb{R}, \text{ falls } (\sup\{a_k : k \geq n\})_n \text{ beschränkt,} \\ \infty, \text{ falls } (\sup\{a_k : k \geq n\})_n \text{ unbeschränkt und } (a_n) \text{ nach unten beschränkt,} \\ -\infty, \text{ falls } (a_n) \text{ nach unten unbeschränkt.} \end{cases}$$

Im ersten Fall folgt die Existenz des lim sup und lim inf aus Satz 3.9. Im Fall einer nach oben (bzw. unten) unbeschränkten Folge haben wir $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$), wegen der oben eingeführten Notation für den Limes einer unbeschränkten Folge.

Der Limes superior und Limes inferior existieren also immer - entweder als reelle Zahlen oder als $\pm\infty$.

Satz 3.12 (Charakterisierung des Limes superior) Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = a$$

genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gelten

(i) $a_n < a + \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bis auf endlich viele,

(ii) $a_m > a - \varepsilon$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$.

Bemerkung. Analog gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = a$$

genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gelten

(i) $a_n > a - \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bis auf endlich viele,

(ii) $a_m < a + \varepsilon$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$.

Korollar 3.13 Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist $\limsup a_n$ der größte Häufungspunkt von (a_n) und $\liminf a_n$ der kleinste Häufungspunkt von (a_n).

3.4 Wichtige Ungleichungen

Lemma 3.14 (Bernoullische Ungleichung) Sei $x \geq -1$. Dann gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Lemma 3.15 Für alle $q \in [0,1)$ gibt es ein $C > 0$, sodass $q^n \leq \frac{C}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge (nq^n) beschränkt.

Proposition 3.16 Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in (-1,1)$ gilt

$$\lim n^k x^n = 0.$$

4 Wurzeln von reellen Zahlen

Wir möchten beweisen, dass für positive reelle Zahlen die Quadratwurzel (sowie die k-te Wurzel) existiert. Eine reelle Zahl $a > 0$ ist also gegeben und wir suchen ein $x > 0$, sodass $x^2 = a$. Also suchen wir die Seitenlänge des Quadrats mit Flächeninhalt a. Wir versuchen einen iterativen Zugang. Wir raten eine Zahl $x_0 > 0$ und betrachten den Rechteck mit Seitenlängen x_0 und a/x_0 (sodass der Flächeninhalt a ist). Um näher an einen Quadrat zu kommen, wählen wir im nächsten Schritt den Rechteck mit einer Seitenlänge $x_1 := \frac{1}{2}(x_0 + \frac{a}{x_0})$ (also arithmetisches Mittel des vorherigen Seitenlängen) und der anderen Seitenlänge a/x_1 (wieder also mit Flächeninhalt a). Im nächstes Schritt hat der Rechteck Seitenlängen $x_2 := \frac{1}{2}(x_1 + \frac{a}{x_1})$ und a/x_2, usw. Der folgende Satz zeigt, dass diese Iteration wirklich zum Ziel führt.

Satz 4.1 Seien $a > 0$ und $x_0 > 0$ reelle Zahlen. Betrachte die Folge $(x_n)_n$ definiert durch die Rekursion

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}).$$

Dann konvergiert die Folge (x_n) gegen ein $x > 0$, sodass $x^2 = a$. Es gibt genau ein $x > 0$, sodass $x^2 = a$.

Definition. Die *Quadratwurzel* einer reellen Zahl $a \geq 0$ ist die eindeutig bestimmte nicht-negative Lösung x der Gleichung $x^2 = a$. Notation: $\sqrt{a}$.

Bemerkung.

- Für $a = 0$ ist $\sqrt{0} = 0$.
- Für $a > 0$ gibt es zwei reelle Lösungen der Gleichung $x^2 = a$, nämlich $\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$. Dies folgt, weil für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$ gilt

$$(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = x^2 - a = 0.$$

  Also $x^2 - a = 0$ genau dann, wenn $x + \sqrt{a} = 0$ oder $x - \sqrt{a} = 0$.

Jetzt konstruieren wir auch die $k-$te Wurzel. Im Beweis wird die Bernoullische Ungleichung benutzt.

Satz 4.2 Sei $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ und $a > 0, a \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert für jeden Anfangswert $x_0 > 0$ die Folge $(x_n)_n$ gegeben durch die Rekursion

$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right).$$

Der Limes ist die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $x^k = a$.

Definition. Sei $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$. Die *$k$-te Wurzel* einer reellen Zahl $a \geq 0$ ist die eindeutig bestimmte nicht-negative Lösung x der Gleichung $x^k = a$. Notation: $\sqrt[k]{a}$ (bei $k = 2$ schreibt man $\sqrt{a}$).

Definition. (Rationale Potenz) Für eine reelle Zahl $x > 0$ und eine rationale Zahl $r = m/n$ (mit $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$) definiert man

$$x^r := \sqrt[n]{x^m}.$$

Lemma 4.3 Für alle $x, y > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt

$$x^r y^r = (xy)^r,\ x^r x^s = x^{r+s},\ (x^r)^s = x^{rs}.$$

5 Unendliche Reihen

Grob gesagt, ist die unendliche Reihe zur gegeben Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots .$$

Definition. Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ gegeben. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ definiert man die *Partialsumme*

$$s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Die Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen heißt die *unendliche Reihe* mit den Gliedern a_n. Notation: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Falls (s_m) konvergiert, dann heißt der Grenzwert die *Summe der Reihe* und wird auch mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet. Falls (s_m) gegen $\pm\infty$ divergiert, schreiben wir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

Bemerkung.

- Das Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hat also zwei Bedeutungen. Es ist die Folge der Partialsummen und im Falle der Konvergenz auch der Grenzwert dieser Folge, d.h. die Summe der Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n.$$

- Der Index der Reihe kann auch bei einem anderen $j \in \mathbb{Z}$ anfangen - falls man Folgenglieder $(a_n), n = j, j+1, j+2, \dots$ summiert.

Bemerkung. Jede Folge $(c_n) \subset \mathbb{R}$ lässt sich als Reihe darstellen, nämlich als die so genannte *Teleskop-Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \text{ mit } d_1 := c_1, d_k := c_k - c_{k-1} \text{ für } k \geq 2.$$

Es gilt $c_n = \sum_{k=1}^{n} d_k, n \in \mathbb{N}$.

Satz 5.1 (Unendliche geometrische Reihe) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert für alle $|x| < 1$ und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Satz 5.2 (Linearkombination konvergenter Reihen) Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen reeller Zahlen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

5.1 $b-$adische Brüche

Das bekannteste Beispiel $b-$adischer Brüche sind Dezimalbrüche, z.B.

$$x := 0,12323\overline{23} = \frac{1}{10} + \frac{23}{10^3} + \frac{23}{10^5} + \cdots = \frac{1}{10} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{23}{10^{3+2n}}.$$

Nach Satz 5.1 ist
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{23}{10^{3+2n}} = \frac{23}{10^3} \sum_{n=0}^{\infty} (10^{-2})^n = \frac{23}{10^3} \frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{23}{990},$$
also $x = \frac{1}{10} + \frac{23}{990} = \frac{61}{495}$.

Definition. Sei $b \geq 2$ eine natürliche Zahl. Ein (unendlicher) *b-adischer Bruch* ist
$$\pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n},$$
wobei $k \in \mathbb{N}_0$, $a_n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n < b$.

Notation: $\pm a_{-k} a_{-k+1} \dots a_{-1} a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$.

Bemerkung.

- Falls $a_n = 0$ für alle $n > m$, dann schreibt man $\pm a_{-k} a_{-k+1} \dots a_{-1} a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m$.
- Für $b = 10$ heißen $b-$adischen Brüche Dezimalbrüche. Für $b = 2$ heißen sie dyadische Brüche. Bei dyadischen Brüchen werden nur die Ziffern 0 und 1 verwendet - dies ist besonders geeignet für elektronische Rechner, bei den zwei Zustände einfach unterscheidet werden können: kein Strom (0), Strom (1).

Satz 5.3 Jeder $b-$adische Bruch stellt eine Cauchy-Folge dar, konvergiert also gegen eine reelle Zahl.

Satz 5.4 Sei $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$. Dann lässt sich jede reelle Zahl in einen $b-$adischen Bruch entwickeln.

Bemerkung. Die $b-$adische Darstellung ist nicht immer eindeutig. Zum Beispiel gilt für die Dezimalbrüche
$$1,0 = 0,999\overline{9}.$$
Dies folgt aus $\sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = \frac{9}{10} \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} = 1$.

5.2 Konvergenz-Kriterien für unendliche Reihen

Es existieren einige Tests der Konvergemz von unendliche Reihen. Hier werden nur die wichtigsten besprochen.

Satz 5.5 (Cauchysches Kriterium) Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass
$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq m \geq N.$$

Satz 5.6 Für jede konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gilt $a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Bemerkung. Wie das Beispiel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ zeigt, ist die Bedingung nur eine notwendige und keine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Satz 5.7 Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe (d.h. die Folge der Partialsummen) beschränkt ist.

Satz 5.8 (Leibniz'sches Kriterium) Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die alternierende Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Absolute Konvergenz

Definition. Ein Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Satz 5.9 Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Satz 5.10 (Majoranten-Kriterium) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit nicht-negativen Gliedern c_n und sei (a_n) eine Folge mit

$$|a_n| \leq c_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Korollar 5.11 Sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergent mit $c_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ und sei $a_n \geq c_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum a_n$ divergent.

Satz 5.12 (Quotienten-Kriterium) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\theta \in (0,1)$ gibt, so dass

$$a_n \neq 0, \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta \text{ für alle } n \geq n_0,$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Falls $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für alle $n \geq n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ dann divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bemerkung.

- Die Bedingung, dass es ein $\theta \in (0,1)$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta$ für alle $n \geq n_0$, ist äquivalent zu

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$

- Es reicht nicht im Satz 5.12, dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Die Quotienten $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ dürfen nicht beliebig nach an 1 herankommen. Ein Beispiel ist die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$, für die $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1$ für alle n, aber die Reihe divergiert.

- Die Bedingung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta$ für alle $n \geq n_0$ ist nicht notwendig für Konvergenz. Ein Beispiel ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$. Hier gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1$, aber es gibt kein $\theta \in (0,1)$, sodass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta$ für alle $n \geq n_0$. Trotzdem konvergiert die Reihe.

Satz 5.13 (Wurzel-Kriterium) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Falls es ein $\theta \in (0,1)$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta \text{ für alle } n \geq n_0,$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Falls $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, dann divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bemerkung. Natürlich ist wieder die Bedingung, dass es ein $\theta \in (0,1)$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta$ für alle $n \geq n_0$, äquivalent zu

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Umordnung von Reihen

Die Kommutativität der Addition von reellen Zahlen $a+b=b+a$ gilt im Allgemeinen nicht für unendlich viele Summanden. Wie wir in der Vorlesung gezeigt haben, kann man, zum Beispiel, die konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1/n)$ so umordnen, dass die umgeordnete Reihe gegen ∞ divergiert.

Definition. Seien M und N zwei beliebige Mengen und $f: M \to N$ eine Funktion.

1. f heißt *injektiv*, falls zu jedem $y \in N$ höchstens ein $x \in M$ existiert mit $f(x) = y$.
2. f heißt *surjektiv*, falls zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ existiert mit $f(x) = y$.
3. f heißt *bijektiv*, falls zu jedem $y \in N$ genau ein $x \in M$ existiert, sodass $f(x) = y$. f ist also genau dann bijektiv, wenn es injektiv und surjektiv ist.

Definition. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Die bezüglich φ *umgeordnete Reihe* ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + a_{\varphi(3)} + \dots.$$

Satz 5.14 Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Dann konvergiert auch jede Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ absolut gegen die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bemerkung. Für Reihen die konvergent aber nicht absolut konvergent sind gilt der obige Satz nicht. Es kann sogar folgendes bewiesen werden (für den Beweis siehe Satz 3.7.2 in [3].)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergent ist. Dann gibt es für jedes $s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$, die gegen s konvergiert.

Cauchy-Produkt von Reihen

Satz 5.15 Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen. Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$c_n := \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = a_1 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

Dann ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergent mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

6 Komplexe Zahlen, Exponentialreihe

6.1 Körper der Komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen sind eine Erweiterung der reellen Zahlen, die uns erlaubt auch, z.B., die Gleichung $x^2 = -1$ zu lösen. Wir definieren komplexe Zahlen als geordnete Paare von reellen Zahlen. Für paare von reellen Zahlen müssen wir aber erst eine Addition und Multiplikation definieren. Die gewählte Multiplikation führt zu einem Körper.

Satz 6.1 Die Menge $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der geordneten Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ versehen mit der Addition

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc) \tag{1}$$

ist ein Körper mit dem Einselement (das neutrale Element der Multiplikation) $(1, 0)$. Das inverse Element zu $(a, b) \neq (0, 0)$ (bezüglich der Multiplikation) ist (c, d) mit

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad d = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Definition. Der Körper in Satz 6.1 heißt der *Körper der komplexen Zahlen*. Notation: $\mathbb{C}$.

Bemerkung.

- Der Körper $\mathbb{C}$ ist **nicht** angeordnet. Man kann zeigen, dass in $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation existiert.
- Für komplexe Zahlen $(a, 0), (b, 0)$ gilt

  $$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \qquad (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0).$$

  Man kann also Zahlen $(x, 0)$ mit $x \in \mathbb{R}$ identifizieren und schreiben

  $$(x, 0) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

  Die Körperoperation in den zwei Körpern sind also verträglich. Wir haben $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Wir definieren die *imaginäre Einheit* $\mathrm{i} := (0, 1)$. Diese erfüllt

  $$\mathrm{i}^2 = (0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

  Also ist i eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$.
- Jedes $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ kann als eine Linearkombination von 1 und i geschrieben werden

  $$z = (x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot \mathrm{i} = x + \mathrm{i}y.$$

  In dieser Darstellung wird das Multiplizieren von komplexen Zahlen einfacher - man muss nur beachten, dass $\mathrm{i}^2 = -1$, also

  $$(a + \mathrm{i}b) \cdot (c + \mathrm{i}d) \;=\; ac + aid + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}^2bd \;=\; ab - bd + \mathrm{i}(ad + bc),$$

  in Übereinstimmung mit (1).

- Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ heißt x der *Realteil* und y der *Imaginärteil* von z

$$\mathrm{Re}(z) = x, \ \mathrm{Im}(z) = y.$$

  Wenn z im kartesischen Koordinatensystem (s.g. Gauß'sche Zahlenebene) gezeichnet wird, dann ist der Realteil die horizontale Komponenten und der Imaginärteil die vertikale Komponenten.

Definition. Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) heißt $\bar{z} := x - \mathrm{i}y$ die *komplex konjugierte* Zahl zu z.

Bemerkung. In der Gauß'schen Zahlenebene entsteht $\bar{z}$ aus z durch Spiegelung an der reellen (horizontalen) Achse. Es ist

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \ \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z}).$$

Definition. Für eine komplexe Zahl z heißt $|z| := \sqrt{z\bar{z}}$ der *Betrag* von z.

Bemerkung.

- Es gilt für $z = x + \mathrm{i}y$

$$|z|^2 = z\bar{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2.$$

  Also ist $|z|$ der Abstand des Punktes z vom Nullpunkt der Gauß'schen Zahlenebene (bezüglich der üblichen euklidischen Metrik).

- Für $z \in \mathbb{R}$ stimmt der komplexe Betrag mit dem Betrag der reellen Zahlen überein.

- Es gelten für alle $z, w \in \mathbb{C}$, $z = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $w = x_2 + \mathrm{i}y_2$

$$\begin{aligned}
\overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w}, \qquad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \\
|zw| &= |z|\,|w|, \\
|\mathrm{Re}z| &\leq |z|, \quad |\mathrm{Im}z| \leq |z|, \quad |z| = |\bar{z}|, \\
|z + w| &\leq |z| + |w|.
\end{aligned}$$

Konvergenz in $\mathbb{C}$

Konvergenz-Begriffe für Folgen und Reihen komplexer Zahlen sind analog den für reelle Zahlen. Wir besprechen hier nur die wichtigsten Punkte.

Definition. Eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt konvergent gegen eine komplexe Zahl c, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|c_n - c| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Wir schreiben dann $\lim_{n\to\infty} c_n = c$.

Bemerkung. Offensichtlich ist es die gleiche Definition wie im reellen Fall - nur ist dabei der Betrag der Betrag von komplexen Zahlen.

Satz 6.2 Eine Folge $(c_n) \subset \mathbb{C}$ konvergiert genau dann, wenn die beiden reellen Folgen $(\mathrm{Re}(c_n))$ und $(\mathrm{Im}(c_n))$ konvergieren. Im Falle der Konvergenz gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(c_n) + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(c_n).$$

Definition. Eine Folge $(c_n) \subset \mathbb{C}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m, n \geq n_0$ gilt

$$|c_n - c_m| < \varepsilon.$$

Satz 6.3 Eine Folge $(c_n) \subset \mathbb{C}$ ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn die beiden reellen Folgen $(\mathrm{Re}(c_n))$ und $(\mathrm{Im}(c_n))$ Cauchy-Folgen sind.

Korollar 6.4 In $\mathbb{C}$ konvergiert jede Cauchy-Folge. Jede in $\mathbb{C}$ konvergente Folge ist Cauchy.

Satz 6.5 Seien $(c_n) \subset \mathbb{C}, (d_n) \subset \mathbb{C}$ konvergente Folgen. Dann konvergieren auch $(c_n + d_n)$ und $(c_n d_n)$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (c_n + d_n) = \lim_{n\to\infty} c_n + \lim_{n\to\infty} d_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} (c_n d_n) = (\lim_{n\to\infty} c_n)(\lim_{n\to\infty} d_n).$$

Falls $\lim d_n \neq 0$, dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $d_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} c_n}{\lim_{n\to\infty} d_n}.$$

Definition. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ mit $(c_n) \subset \mathbb{C}$ heißt *konvergent*, falls die Folge der Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k, n \in \mathbb{N}$$

konvergiert. Sie heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konvergiert.

Satz 6.6 Für jede konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $(a_n) \subset \mathbb{C}$ gilt $a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Der Beweis von Satz 6.6 sowie die Beweise von Sätzen 6.7-6.12 sind komplett analog zu den im reellen Fall.

Das Cauchysche Kriterium, das Majoranten-Kriterium, das Quotienten-Kriterium und das Wurzel-Kriterium gelten für komplexe Reihen genauso wie für reelle Reihen. Das Leibniz'sche Kriterium macht im komplexen Fall natürlich keinen Sinn, da es in $\mathbb{C}$ kein > 0 und < 0 gibt.

Satz 6.7 (Cauchysches Kriterium) Sei $(c_n) \subset \mathbb{C}$ eine Folge. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left| \sum_{k=m}^{n} c_k \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq m \geq N.$$

Satz 6.8 (Majoranten-Kriterium) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe mit nicht-negativen Gliedern $b_n \in \mathbb{R}$ und sei $(c_n) \subset \mathbb{C}$ eine Folge mit

$$|c_n| \leq b_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut.

Satz 6.9 (Quotienten-Kriterium) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine komplexe Reihe. Falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\theta \in (0, 1)$ gibt, so dass

$$c_n \neq 0, \quad \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \leq \theta \text{ für alle } n \geq n_0,$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut.

Falls $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \geq 1$ für alle $n \geq n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ dann divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Satz 6.10 (Wurzel-Kriterium) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine komplexe Reihe. Falls es ein $\theta \in (0,1)$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\sqrt[n]{|c_n|} \leq \theta \text{ für alle } n \geq n_0,$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut.

Falls $\sqrt[n]{|c_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, dann divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Satz 6.11 Sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine absolut konvergente komplexe Reihe. Dann konvergiert auch jede Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} c_{\varphi(n)}$ absolut gegen die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Satz 6.12 Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente komplexe Reihen. Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$c_n := \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = a_1 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1.$$

Dann ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergent mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

6.2 Exponentialreihe

Definition. Für $z \in \mathbb{C}$ heißt

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

die *Exponentialreihe* in z.

Satz 6.13 Die Exponentialreihe konvergiert in jedem $z \in \mathbb{C}$ absolut.

Bemerkung.

- Nach Satz 6.13 ist exp eine Funktion (die *Exponentialfunktion*) mit Definitionsbereich $\mathbb{C}$ und Zielmenge $\mathbb{C}$, d.h.

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

- $e := \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots$ heißt die *Eulersche Zahl*. Es ist $e = 2,7182818....$

Satz 6.14 (Abschätzung des Restglieds) Es gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} + R_{N+1}(z),$$

wobei
$$|R_{N+1}(z)| \leq 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \text{ für alle } |z| \leq 1+\frac{N}{2}.$$

Satz 6.15 (Additions-Theorem der Exponentialfunktion) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt
$$\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2).$$

Satz 6.16 Es gilt

1. $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$,
2. $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$,
3. $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
4. $|\exp(\mathrm{i}x)| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
5. $\exp(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung. Der letzte Punkt im Satz 6.16 zeigt, dass um die Werte der Exponentialfunktion in $\mathbb{R}$ zu kennen, es genügt, die Werte im Bereich $-1/2 < x \leq 1/2$ zu kennen. Wenn wir nämlich ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ als $x = n + \xi$ mit $-1/2 < \xi \leq 1/2, n \in \mathbb{Z}$ schreiben, folgt $\exp(x) = \exp(n+\xi) = \exp(n)\exp(\xi) = e^n \exp(\xi)$.

7 Abzählbarkeit, Überabzählbarkeit

Definition. Eine nichtleere Menge A heißt *abzählbar*, wenn es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to A$ gibt, d.h. wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Die leere Menge wird als abzählbar definiert. Eine Menge heißt *überabzählbar*, wenn sie nicht abzählbar ist.

Zwei Mengen A, B heißen *gleichmächtig*, falls es eine Bijektion $A \to B$ gibt.

Bemerkung.

- Offenbar ist jede endliche Menge $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ ist abzählbar. Die surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to A$ kann man, z.B., als $\varphi(j) = a_j, j = 1\ldots, N$ und $\varphi(j) = a_N, j > N$ wählen.
- $\mathbb{Z}$ ist abzählbar. Man kann die surjektive Abbildung wählen als

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \qquad \varphi(n) := \begin{cases} k & \text{falls } n = 2k,\ k \in \mathbb{N}, \\ -k & \text{falls } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

  Eigentlich ist φ auch bijektiv, sodass $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

Es gilt sogar, dass jede unendlich abzählbare Menge gleichmächtig mit $\mathbb{N}$ ist.

Satz 7.1 Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen M_n, $n \in \mathbb{N}$, ist wieder abzählbar.

Korollar 7.2 Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar.

Satz 7.3 Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

8 Stetigkeit von Funktionen

Stetigkeit von Funktionen ist ein zentraler Begriff der Analysis. Funktionen und ihr Definitionsbereich, die Zielmenge und das Bild haben wir schon in Abschnitt 1.3 definiert. Funktionen mit Zielmenge $N \subset \mathbb{R}$ heißen *reellwertige Funktionen* und die mit Zielmenge $N \subset \mathbb{C}$ *komplexwertige Funktionen*.

8.1 Funktionen

Einige wichtige Funktionen:

1. konstante Funktion
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto c \in \mathbb{C}$$
2. Identität
$$\mathrm{Id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto x$$
3. Betragsfunktion:
$$\mathrm{abs} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$$
4. Signumfunktion:
$$\mathrm{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$
5. charakteristische Funktion von $A \subset \mathbb{C}$:
$$\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
Bemerkung: Für $A \subset \mathbb{R}$ wird $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genauso definiert.
6. Quadratwurzel:
$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$$
7. Exponentialfunktion:
$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto \exp(x)$$
8. Polynomfunktion:
$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto P(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
wobei $a_j \in \mathbb{C}$ für alle $j = 0, \ldots, n$

9. rationale Funktion:
$$R : D \to \mathbb{C}, x \mapsto R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$
wobei P, Q Polynome sind und $D := \{x \in \mathbb{C} : Q(x) \neq 0\}$

Im Rest des Kapitels 8 formulieren wir die meisten Resultate im Körper $\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sein darf. Sei im folgenden $D \subset \mathbb{K}$.

Definition. Seien $f, g : D \to \mathbb{K}, \lambda \in \mathbb{K}$. Dann definieren wir Funktionen $f + g, f \cdot g$, $\lambda f : D \to \mathbb{K}$ durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \qquad (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x).$$

Weiter setzen wir $D' := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ und definieren

$$\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{K}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Definition. Seien M, N, L beliebige Mengen (nicht unbedingt in $\mathbb{K}$) und $f : M \to N, g : N \to L$. Dann heißt

$$g \circ f : M \to L, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \text{für } x \in M$$

die *Komposition.*

8.2 Stetigkeit

Sei $D \subset \mathbb{K}$.

Definition. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ heißt *stetig in* $x_0 \in D$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

f heißt *stetig*, falls f in allen $x_0 \in D$ stetig ist.

Definition. $f : D \to \mathbb{K}$ heißt *Lipschitzstetig*, falls $L \geq 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

L heißt dann *Lipschitzkonstante* von f.

Proposition 8.1 Jede Lipschitzstetige Funktion ist stetig.

Proposition 8.2 Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig.

Für $x \in \mathbb{K}$ und $\varepsilon > 0$ bezeichnen wir mit $B_\varepsilon(x)$ den „offenen“ Ball mit Radius ε und Mittelpunkt x, d.h.

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{K} : |y - x| < \varepsilon\}.$$

Definition. Sei $A \subset \mathbb{K}$.

1. $x \in \mathbb{K}$ heißt *Häufungspunkt von* A, falls für alle $\varepsilon > 0$ die Menge $A \cap B_\varepsilon(x)$ unendlich viele Elemente hat.
2. $x \in A$ heißt *isolierter Punkt*, falls für ein $\varepsilon > 0$ gilt: $B_\varepsilon(x) \cap A = \{x\}$.

Bemerkung.

- Ein Punkt $x \in A$ ist entweder ein Häufungspunkt von A oder ein isolierter Punkt (und nicht beides).
- Im isolierten Punkt $x_0 \in A$ ist jede Funktion $f : A \to \mathbb{K}$ automatisch stetig.

Definition.

- Sei $D \subset \mathbb{K}$, $f : D \to \mathbb{K}$ und sei $x_0 \in \mathbb{K}$ Häufungspunkt von D. Die Funktion f *konvergiert* für x gegen x_0 gegen $a \in \mathbb{K}$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

  $$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

  Wir schreiben $f(x) \to a$ für $x \to x_0$ oder

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

  a heißt dann der *Grenzwert* von f in x_0.
- Sei $D \subset \mathbb{K}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in \mathbb{K}$ Häufungspunkt von D. Wir sagen

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty,$$

  falls es für jedes $M \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $f(x) > M$ (bzw. $f(x) < M$) für alle $x \in D$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$.
- Sei $D \subset \mathbb{R}$ unbeschränkt von oben (bzw. unten) und $f : D \to \mathbb{K}$. Wir schreiben

  $$\lim_{x \to \pm\infty} = a \in \mathbb{K},$$

  falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K > 0$ (bzw. $K < 0$) existiert, sodass

  $$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } x > K \text{ (bzw. } x < K).$$

Proposition 8.3 Sei $D \subset \mathbb{K}$, x_0 Häufungspunkt von D, $f : D \to \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$. Dann sind äquivalent

1. $f(x) \to a$ für $x \to x_0$.
2. Für alle Folgen $(x_k)_k$ in D mit $x_0 = \lim_{k \to \infty} x_k$ gilt $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = a$.

Lemma 8.4 Sei $D \subset \mathbb{K}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D, $f : D \to \mathbb{K}$. Dann sind äquivalent

1. $f(x) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$.
2. f ist stetig in x_0.

Korollar 8.5 Sei $D \subset \mathbb{K}$, $x_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{K}$. Dann sind äquivalent

1. $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$ für alle $(x_k) \subset D$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$.
2. f ist stetig in x_0.

Bemerkung. Lemma 8.4 und Korollar 8.5 sind sehr praktische Umformulierungen der Stetigkeit.

Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$.

- Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, x_0)$.
$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = c$$
bedeutet $\lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x) = c$. Das heißt alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in D$ und $x_k < x_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x_k \to x_0$ erfüllen $f(x_k) \to c$ $(k \to \infty)$. c heißt dann der *linksseitiger Grenzwert* von f in x_0.

- Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$.
$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = c$$
bedeutet $\lim_{x\to x_0, x>x_0} f(x) = c$. Das heißt alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in D$ und $x_k > x_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x_k \to x_0$ erfüllen $f(x_k) \to c$ $(k \to \infty)$. c heißt dann der *rechtsseitiger Grenzwert* von f in x_0.

Satz 8.6 Seien $f, g : D \to \mathbb{K}$ stetig. Dann sind auch die Funktionen $f + g, fg : D \to \mathbb{K}$ stetig.
Für $D' := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ gilt $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{K}$ ist stetig.

Bemerkung. Also ist jede rationale Funktion auf ihrem Definitionsbereich stetig.

Satz 8.7 Seien $f : D \to \mathbb{K}$, $g : E \to \mathbb{K}$ gegeben mit $f(D) \subset E$. Falls f stetig ist in $x_0 \in D$ und g stetig in $f(x_0) \in E$, dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{K}$ stetig in x_0.

8.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 8.8 (Zwischenwertsatz) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$). Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$.

Korollar 8.9 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \neq f(b)$. Dann existiert zu jedem $c \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x_0 \in [a, b]$, sodass $f(x_0) = c$.

Korollar 8.10 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (eventuell uneigentlich) und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ein Intervall (eventuell uneigentlich).

Definition. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt* (bzw. *nach unten beschränkt*, *nach oben beschränkt*) falls $f(D)$ eine beschränkte (bzw. nach unten beschränkte, nach oben beschränkte) Menge ist.

Definition. Ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ heißt *kompakt*.

Satz 8.11 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f sein Maximum und Minimum an, das heißt es existieren $x_+, x_- \in [a, b]$, so dass $f(x_+) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ und $f(x_-) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Bemerkung. Eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ ist also immer beschränkt und das Bild ist das kompakte Intervall $[f(x_-), f(x_+)]$ (wobei $f(x_-) = f(x_+)$ auftreten kann).

Definition. Sei $A \subset D$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ ist *gleichmäßig stetig auf* A, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta$ folgt, dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Bemerkung.

- Offenbar ist jede gleichmäßig stetige Funktion stetig. Die gleichmäßige Stetigkeit unterscheidet sich von der Stetigkeit, in dem das $\delta > 0$ nur von $\varepsilon > 0$ abhängt aber nicht vom Punkt x_0. Das heißt es gibt ein δ welches für alle $x_0 \in A$ funktioniert. Bei der Stetigkeit ist also im Allgemeinen $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ und bei der gleichmäßigen Stetigkeit ist nur $\delta = \delta(\varepsilon)$.
- Jede Lipschitzstetige Funktion ist gleichmäßig stetig. Hier kann $\delta := \varepsilon/L$ gewählt werden.

Satz 8.12 Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ (d.h. auf einem kompakten Intervall) ist gleichmäßig stetig.

Bemerkung. Im Satz 8.12 ist wichtig, dass das Intervall abgeschlossen und beschränkt ist. Für andere Intervalle gilt die Aussagen i.A. nicht.

Definition. Sei $f : M \to N$ eine Bijektion zwischen zwei allgemeinen Mengen M, N (nicht unbedingt Teilmengen von $\mathbb{K}$). Dann heißt $f^{-1} : N \to M$ mit

$$f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; f(x) = y$$

die *Umkehrfunktion* (oder *inverse Funktion*) von f.

Bemerkung. Bitte nicht $f^{-1}(x)$ mit der Funktion $\frac{1}{f(x)}$ verwechseln!

Definition. (Monotone Funktionen) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. f heißt

$$\begin{cases} \textit{monoton wachsend} \\ \textit{streng monoton wachsend} \\ \textit{monoton fallend} \\ \textit{streng monoton fallend} \end{cases}, \text{ falls } \begin{cases} f(x) \leq f(x') \\ f(x) < f(x') \\ f(x) \geq f(x') \\ f(x) > f(x') \end{cases}$$

für alle $x, x' \in D$ mit $x < x'$.

Satz 8.13 Sei $f : I \to \mathbb{R}$, I (eventuell uneigentliches) Intervall. Sei f stetig und streng monoton wachsend. Dann ist auch $I' := f(I)$ Intervall (eventuell uneigentlich) und $f : I \to I'$ bijektiv. Weiter ist $f^{-1} : I' \to I$ stetig und streng monoton wachsend.

Bemerkung. Eine analoge Aussage gilt für stetige streng monoton fallende f.

Beispiel. Für $k \in \mathbb{N}$ betrachte $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k$. Diese Funktion ist stetig und streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$ und es gilt $f([0, \infty)) = [0, \infty)$. Die Umkehrfunktion ist $f^{-1} : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[k]{x}$. Als Kontrolle rechnen wir

$$f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; \sqrt[k]{y} = x \;\Leftrightarrow\; y = x^k \;\Leftrightarrow\; y = f(x).$$

9 Logarithmus und trigonometrische Funktionen

9.1 Logarithmus und allgemeine Potenz

Lemma 9.1 Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist bijektiv, streng monoton wachsend und

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty.$$

Wegen der Bijektion von exp existiert die Umkehrfunktion $\exp^{-1}$.

Definition. Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion heißt der *Logarithmus*, $\log := \exp^{-1}$, $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Satz 9.2 Der Logarithmus ist stetig, streng monoton wachsend und erfüllt

$$\lim_{x\to0+} \log(x) = -\infty,\ \lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty,\ \log(1) = 0,\ \log(e) = 1.$$

Es gilt außerdem

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y) \qquad \forall x, y > 0,$$
$$\log \frac{1}{x} = -\log(x) \qquad \forall x > 0.$$

Definition. Sei $a > 0$. Die Funktion $\exp_a(x) := \exp(x \log a)$ heißt *Exponentialfunktion zur Basis a.*

Bemerkung. Die Exponentialfunktion zur Basis e bezeichnen wir weiterhin mit $\exp(x)$.

Satz 9.3 Sei $a > 0$. Die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist stetig und es gilt

1. $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$,
2. $\exp_a(q) = a^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.

Korollar 9.4 Für alle $a > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Bemerkung. Satz 9.3 zeigt, dass $\exp_a(x)$ die uns bekannte Potenzfunktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ erweitert: die Eigenschaften bleiben erhalten und der Definitionsbereich wird erweitert von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$. Deswegen macht es Sinn die Notation

$$a^x := \exp_a(x) \text{ für alle } a > 0, x \in \mathbb{R}$$

zu verwenden. Deswegen wird auch

$$e^x := \exp(x)$$

geschrieben.

Satz 9.5 Für alle $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

1. $a^{x+y} = a^x a^y$,
2. $\log(a^x) = x \log(a)$,
3. $(a^x)^y = a^{xy}$,
4. $a^x b^x = (ab)^x$,
5. $(1/a)^x = a^{-x}$.

9.2 Trigonometrische Funktionen

Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktionen
$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\cos(x) := \operatorname{Re}(\exp(\mathrm{i}x)), \qquad \sin(x) := \operatorname{Im}(\exp(\mathrm{i}x)).$$

Bemerkung.

- Wir haben also die *Eulersche Formel* $e^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$.
- Da $|e^{\mathrm{i}x}| = 1$, liegt der Punkt $\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ auf dem Einheitskreis der Gaußschen Zahlenebene. Dass dabei x immer die orientierte Länge des Bogens von $z = 1$ nach $z = e^{\mathrm{i}x}$ ist, zeigen wir in der Vorlesung Analysis II.

Satz 9.6 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

- $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}),\ \sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x})$
- $\cos(-x) = \cos(x),\ \sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Satz 9.7 $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig.

Satz 9.8 (Additionstheoreme) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y). \end{aligned}$$

Bemerkung. Insbesondere gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x),$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Korollar 9.9 Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \\ \sin(x) - \sin(y) &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

Satz 9.10 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... - ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... - ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Diese Reihen konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 9.11 Es gilt

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Satz 9.12 Die Funktion cos hat im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle t_0. Wir definieren $\pi := 2t_0$. Der Kosinus ist streng monoton fallend auf $[0, 2]$ und der Sinus ist streng monoton steigend auf $[0, \frac{\pi}{2}]$. Beide Funktionen sind positiv auf $(0, \frac{\pi}{2})$.

Satz 9.13 (Spezielle Werte von exp) Für die komplexe Exponentialfunktion gilt

$$\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}, \quad \exp(\mathrm{i}\pi) = -1, \quad \exp\left(\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}, \quad \exp(2\pi\mathrm{i}) = 1.$$

Bemerkung. Aus Satz 9.13 können folgende Werte von cos und sin abgeleitet werden

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

Korollar 9.14 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x), \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x), \tag{i}$$
$$\cos(x + \pi) = -\cos(x), \qquad \sin(x + \pi) = -\sin(x), \tag{ii}$$
$$\cos(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \qquad \sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \tag{iii}$$

Korollar 9.15 (Nullstellen von Sinus und Kosinus) Es gilt

- $\cos(x) = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin(x) = 0$ genau dann, wenn $x = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Korollar 9.16 Es gilt für $x \in \mathbb{R}$ genau dann $\exp(\mathrm{i}x) = 1$, falls $x = k2\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Definition. 1. Die *Tangensfunktion* ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ definiert durch

$$\tan x := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

2. Die *Kotangensfunktion* ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ definiert durch

$$\cot x \,:=\, \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Bemerkung. Aus Korollar 9.14 folgt $\cot(x) = -\tan(x - \frac{\pi}{2})$.

Satz 9.17 (Umkehrfunktionen von Sinus, Kosinus und Tangens) 1. Die Funktion cos ist auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend und bildet $[0, \pi]$ bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. Die Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1, 1] \,\to\, [0, \pi]$$

nennen wir *Arcus-Kosinus*.

2. Die Funktion sin ist auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wachsend und bildet $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. Die Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1, 1] \,\to\, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

nennen wir *Arcus-Sinus*.

3. Die Funktion tan ist auf dem Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton wachsend und bildet $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Die Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \,\to\, \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

nennen wir *Arcus-Tangens*.

9.3 Polarkoordinaten

Neben der Darstellung der komplexen Zahlen mit Hilfe der kartesischen Koordinaten, d.h. mit Hilfe des Realteiles und des Imaginärteiles, gibt es noch eine übliche Darstellung: mit Hilfe des Abstandes vom Ursprung und des orientierten Winkels (im Bogenmaß) zur positiven reellen Halbachse. Diese zwei Größen heißen die Polarkoordinaten.

Satz 9.18 (Polarkoordinaten) Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich schreiben als

$$z \,=\, r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi},$$

wobei $\varphi \in \mathbb{R}$ und $r = |z| \in [0, \infty)$. Für $z \neq 0$ ist φ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Mit Hilfe der Polarkoordinaten wird das Produkt (und Quotient) von zwei komplexen Zahlen sehr einfach berechnet:

$$z_1 = r_1 e^{\mathrm{i}\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{\mathrm{i}\varphi_2} \;\Rightarrow\; z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Korollar 9.19 ($n-$te Einheitswurzel) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Gleichung

$$z^n = 1$$

hat genau n komplexe Lösungen, nämlich $z = w_k$, wobei

$$w_k = e^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{n}}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

10 Differentiation

10.1 Die Ableitung

Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Dann heißt f in x_0 *differenzierbar*, falls

$$f'(x_0) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D, x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert (als reelle Zahl, d.h. $f'(x_0) \in \mathbb{R}$). Der Grenzwert $f'(x_0)$ heißt die *Ableitung* von f im Punkt x_0.

Bemerkung.

- Die Ableitung wird oft dargestellt auch als

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0, x+h \in D}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

  Dies ist natürlich äquivalent zur obigen Definition.

- Oft wird einfach die kurze Notation $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, bzw. $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ geschrieben.

- Geometrisch ist der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

  die Steigung der Sekante durch $\big(x_0, f(x_0)\big)$ und $\big(x, f(x)\big)$. Beim Grenzübergang $x \to x_0$ geht die Sekante in die Tangente des Graphen von f in $\big(x_0, f(x_0)\big)$ über. $f'(x_0)$ ist also die Steigung der Tangente des Graphen von f in $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

- In der Regel wird D ein Intervall mit mehr als einem Punkt sein, so dass jeder Punkt $x_0 \in I$ ein Häufungspunkt ist.

- Existiert nur der rechtsseitige bzw. linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten, so heißt f *rechtsseitig* bzw. *linksseitig differenzierbar* in x_0. Die rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung bezeichnen wir mit $f'_+(x_0)$ bzw. $f'_-(x_0)$.

- Bei Randpunkten von D (z.B. $D = [a,b]$ und $x_0 = a$) existiert offenbar nur ein einseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten. In diesem Fall werden wir trotzdem von Differenzierbarkeit (statt einseitiger Differenzierbarkeit) sprechen.
- Andere Notation für die Ableitung: $\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$.

Beispiel.
- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto mx + n$ mit fest gewählten $m, n \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f'(x_0) = m$.
- Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist $f'(x_0) = 2x_0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Für $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ ist $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ für alle $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Für $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\exp'(x_0) = \exp(x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Für $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$ und $\cos'(x_0) = -\sin(x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar. In $x = 0$ ist f nicht differenzierbar, da $f'_-(0) = -1 \neq 1 = f'_+(0)$.

Bemerkung. Wenn man z.B. die Funktion $f(x) = x^2$ nur mit dem Definitionsbereich $[0,1]$ versieht, dann ist nach unserer Definition f in jedem $x_0 \in [0,1]$ differenzierbar (obwohl in den Randpunkten nur einseitige Ableitungen existieren).

Satz 10.1 (Lineare Approximierbarkeit) Sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R},\ x_0 \in D$ Häufungspunkt von D. Dann ist f genau dann in x_0 differenzierbar, falls $m \in \mathbb{R}$ existiert, sodass für alle $x \in D$ gilt

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \varphi(x)$$

wobei $\varphi : D \to \mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0$$

erfüllt. In diesem Fall ist $f'(x_0) = m$.

Bemerkung. Differenziebrbarkeit in einem Punkt x_0 ist also gleibedeutend mit der Approximierbarkeit durch eine affin-lineare Funktion, nämich durch $L(x) := f(x_0) + m(x - x_0)$.

Korollar 10.2 Sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ differenzierbar in einem Häufungspunkt $x_0 \in D$ von D. Dann ist f stetig in x_0.

Bemerkung. Die Rückrichtung gilt nicht! Ein Beispiel ist die Betrag-Funktion.

10.2 Differentiations-Regeln

Satz 10.3 Seien $f, g : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ differenzierbar in einem Häufungspunkt $x_0 \in D$ von D und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $\lambda f,\ f + g,\ f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und es gelten

1. Linearität:

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= f'(x_0)+g'(x_0)\\ (\lambda f)'(x_0) &= \lambda f'(x_0)\end{aligned}$$

2. Produktregel:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

3. Quotientenregel:
   Falls zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, dann ist

   $$\frac{f}{g} : \{x \in D : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R},$$

   differenzierbar in x_0 mit

   $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Beispiel.

- Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto= x^n$ mit fest gewähltem $n \in \mathbb{N}$ ist $f'(x) = nx^{n-1}$.
- Für $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ist $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.
- Für $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ ist $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Satz 10.4 (Ableitung der Umkehrfunktion) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt,

$$f : I \to \mathbb{R}$$

stetig und streng monoton wachsend (oder fallend). Sei dann

$$g = f^{-1} : J \to \mathbb{R},\ J = f(I).$$

Ist dann f differenzierbar in $x_0 \in I$ und ist $f'(x_0) \neq 0$, so ist g im Punkt $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\big(g(y_0)\big)}.$$

Beispiel.

- Für $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gilt $\log'(x) = \frac{1}{x}$.
- $\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist auf $(-1, 1)$ differenzierbar und $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für alle $x \in (-1, 1)$.
- Für $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Mit Hilfe der Ableitung von log kann man zeigen:

Proposition 10.5

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Satz 10.6 (Kettenregel) Sei $f : D \to \mathbb{R},\ g : E \to \mathbb{R},\ f(D) \subset E$. f sei differenzierbar in einem Häufungspunkt $x_0 \in D$ und g sei differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$. Dann ist

$$g \circ f : D \to \mathbb{R},\ (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

differenzierbar in x_0 mit

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0).$$

Beispiel.

- Für eine beliebige differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ und $F(x) := f(ax+b)$ gilt $\frac{dF}{dx}(x) = af'(ax+b)$.
- Für $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^a$ mit $a \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = ax^{a-1}$.

Definition. (Höhere Ableitungen) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in D mit Ableitungen

$$f' : D \to \mathbb{R}.$$

Falls die Ableitung

$$f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

in $x_0 \in D$ existiert, so nennen wir $f''(x_0)$ die zweite Ableitung von f in x_0.

Induktiv definieren wir dann k - te Ableitungen von f, $k \in \mathbb{N}$. Notation: $\frac{d^k f}{dx^k}(x_0)$ oder $f^{(k)}(x_0)$.

10.3 Lokale Extrema und Mittelwertsatz

Definition. Eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $a < b$, hat in $x_0 \in (a,b)$

1. ein *lokales Maximum*, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass für alle $x \in (a,b)$ mit $|x - x_0| < \epsilon$ gilt
$$f(x) \le f(x_0)$$
2. ein *striktes lokales Maximum*, falls sie da eine lokales Maximum hat und die Gleichheit $f(x) = f(x_0)$ nur für $x = x_0$ gilt

Ein *lokales und striktes lokales Minimum* wird analog (mit $f(x) \ge f(x_0)$) definiert. Ein *Extremum* ist ein Oberbegriff für Maximum und Minimum.

Satz 10.7 Eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ besitze in $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Extremum und sei differenzierbar in x_0. Dann gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

Bemerkung. 1. Falls $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ein Extremum in $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ hat, so folgt nicht, dass $f'(x_0) = 0$, auch wenn $f'(x_0)$ existiert. Betrachte, z.B. $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x$.

2. Falls $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, so ist $f'(x_0) = 0$ notwendig für lokales Extremum an x_0, aber nicht hinreichend. Ein Beispiel ist $f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3, x_0 = 0$. Es gilt $f'(0) = 0$, aber f hat kein lokales Extremum in $x_0 = 0$.

3. $f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$ hat lokales Minimum in $x = 0$, ist aber nicht differenzierbar in $x = 0$, das Kriterium aus Satz 10.7 ist also nicht anwendbar.

Definition. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f differenzierbar an x_0. Dann heißt x_0 *stationärer Punkt* von f, falls $f'(x_0) = 0$. Ein stationärer Punkt, der kein lokales Extremum ist, heißt *Sattelpunkt.*

Satz 10.8 (Rolle) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, differenzierbar in (a, b) und sei

$$f(a) = f(b).$$

Dann existiert $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = 0.$$

Satz 10.9 (Mittelwertsatz) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dann existiert $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bemerkung. Der Mittelwertsatz sagt also, dass die Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f an einer gewissen Zwischenstelle $(x_0, f(x_0))$ ist.

Korollar 10.10 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Fall es $m, M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$m \le f'(x) \le M \qquad \text{für alle } x \in (a, b),$$

dann gilt für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$

$$m(x_2 - x_1) \ \le\ f(x_2) - f(x_1) \ \le\ M(x_2 - x_1).$$

Bemerkung. In den Voraussetzungen von Satz 10.8 und 10.9 ist f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dies ist natürlich allgemeiner als die Differenzierbarkeit auf $[a, b]$. Zum Beispiel, gilt der Mittelwertsatz für die Funktion $f(x) := \sqrt{x}$ auf $[0, 1]$, die in $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

Korollar 10.11 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dann gilt

1. $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$ genau dann, wenn f konstant.

2. $f'(x) \ge 0$ für alle $x \in (a, b)$ genau dann, wenn f monoton wachsend.

3. Falls $f'(x) > 0 \quad$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f strikt monoton wachsend.

4. $f'(x) \leq 0 \quad$ für alle $x \in (a, b)$ genau dann, wenn f monoton fallend.

5. Falls $f'(x) < 0 \quad$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f strikt monoton fallend.

Bemerkung. In 3. und 5. oben gilt keine Äquivalenz wegen Sattelpunkten. Zum Beispiel ist $f(x) = x^3$ in $\mathbb{R}$ strikt monoton wachsend obwohl $f'(0) = 0$.

Satz 10.12 (Hinreichende Kriterien für lokale Extrema) (i) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig auf (a, b). Sei $x_0 \in (a, b)$ und f differenzierbar auf $(a, b) \setminus \{x_0\}$. Falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass

$$f'(x) < 0 \; \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0), \qquad f'(x) > 0 \; \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon),$$

dann hat f in x_0 ein striktes lokales Minimum.

Falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass

$$f'(x) > 0 \; \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0), \qquad f'(x) < 0 \; \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon),$$

dann hat f in x_0 ein striktes lokales Maximum.

(ii) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a, b), $x_0 \in (a, b)$, f zweimal differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ (bzw. $f''(x_0) < 0$). Dann hat f ein striktes lokales Minimum (bzw. striktes lokales Maximum) in x_0.

Satz 10.13 (Zweiter Mittelwertsatz) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dann existiert $x_0 \in (a, b)$ mit

$$g'(x_0)(f(b) - f(a)) = f'(x_0)(g(b) - g(a)).$$

Satz 10.14 (de l'Hospital-I) Seien $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a, b) mit

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0.$$

Es gelte weiter $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und es existiere der Grenzwert

$$q := \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dann ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und es gilt

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = q.$$

Bemerkung. Satz 10.14 gilt auch für $a = -\infty$ und für

- $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ und $\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = 0$ mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Beispiel.

- Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x^\alpha - 1}{\log x} = \alpha$.
- $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Satz 10.15 (de l'Hospital-II) Seien $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a, b) mit

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = \infty.$$

Es gelte weiter $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und es existiere der Grenzwert

$$q := \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = q.$$

Bemerkung. Satz 10.15 gilt auch für

- $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ und $\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to a+} g(x) = \pm\infty$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,
- $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ und $\lim_{x\to b-} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to b-} g(x) = \pm\infty$ mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Beispiel. Für alle $\alpha > 0$ gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$.

10.4 Konvexität

Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $f : D \to \mathbb{R}$ heißt konvex (auf D), falls für alle $x_1, x_2 \in D$ und für alle $t \in (0, 1)$

$$f\Big(tx_1 + (1-t)x_2\Big) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Bemerkung. Geometrisch bedeutet Konvexität, dass für beliebige zwei Punkte des Graphen der Graph von f für alle x - Werte zwischen diesen Punkten immer unterhalb der Sekante durch diese Punkte liegt.
Um dies zu zeigen, schreiben wir die Gleichung der Sekante

$$s(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Punkte $x \in (x_1, x_2)$ kann man schreiben als

$$x(t) = tx_1 + (1-t)x_2$$

mit $t \in (0, 1)$.

Der Wert der Sekantenfunktion in $x(t)$ ist

$$
\begin{aligned}
s\big(x(t)\big) &= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \underbrace{\big(x(t) - x_1\big)}_{(1-t)(x_2-x_1)} \\
&= f(x_1) + (1-t)\big(f(x_2) - f(x_1)\big) \\
&= tf(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2) \\
&\geq f\big(x(t)\big),
\end{aligned}
$$

falls f konvex ist.

Satz 10.16 Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar auf D. Dann is f ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$.

Lemma 10.17 (Youngsche Ungleichung) Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $x, y > 0$

$$
xy < \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.
$$

Bemerkung. Für $p = q = 2$ folgt die Youngsche Ungleichung sofort aus $(x-y)^2 \geq 0$ für alle $x, y > 0$.

11 Das Riemann Integral

Sei $a < b$.

Definition.

1. Eine *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$ is eine endliche Teilmenge

$$
Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]
$$

   mit $x_0 = a, x_n = b$ und $x_{j-1} < x_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

2. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt eine *Treppenkfunktion*, falls es eine Zerlegung Z von $[a, b]$ gibt, sodass f konstant auf jedem Teilintervall (x_{j-1}, x_j), $j = 1, \ldots, n$.

3. Die Menge aller möglichen Treppenfunktionen auf $[a, b]$ bezeichnen wir mit $T[a, b]$.

Bemerkung. Die Werte einer Treppenfunktion in den Zerlegungspunkten $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ können beliebig sein.

Definition. (Integral für Treppenfunktionen) Sei $f \in T[a, b]$ mit der Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und für jedes $k = 1, \ldots, n$ sei $f(x) = c_k \in \mathbb{R}$ für alle $x \in (x_{k-1}, x_k)$.

$$
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1})
$$

heißt das Integral von f über $[a, b]$.

Bemerkung. Eine einzige Treppenfunktion f kann bezüglich mehrerer Zerlegungen definiert werden. Zum Beispiel kann jedes Teilintervall in beliebig viele kleinere Teilintervalle unterteilt werden. Damit das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ wohldefiniert ist, muss geezeigt werden, dass der Wert des Integrals von der Zerlegung unabhängig ist.

Lemma 11.1 Seien $f, g \in T[a,b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gelten

(i) $\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int_a^b (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,

(iii) $f \leq g \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Definition. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Das *untere (Riemann) Integral* ist

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \ := \ \sup\left\{ \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \ : \ g \in T[a,b],\ g \leq f \text{ auf } [a,b] \right\}$$

und das *obere (Riemann) Integral* ist

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \ := \ \inf\left\{ \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \ : \ g \in T[a,b],\ g \geq f \text{ auf } [a,b] \right\}.$$

Bemerkung. Offensichtlich gilt für jedes $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \ \leq \ \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Definition. Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-intergrierbar*, falls

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \ = \ \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \ =: \ \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Dann heißt $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ *das Integral* von f über $[a,b]$.

Bemerkung. Offensichtlich ist jede Treppenfunktion Riemann-integrierbar.

Satz 11.2 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

1. f ist integrierbar.
2. Für alle $\varepsilon > 0$ existieren Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ auf $[a,b]$, sodass

$$\int_a^b \psi(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\ \mathrm{d}x \ \leq \ \varepsilon.$$

Satz 11.3 Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Satz 11.4 Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Riemannsche Summen

Die Riemannsche Summe ist eine Approximation des Integrals einer Funktion über $[a, b]$ mit Hilfe von Treppenfunktionen auf einer genügend feinen Zerlegung von $[a, b]$. Die Treppenfunktion muss nur in einem beliebigen Punkt auf jedem Teilintervall den gleichen Wert wie f haben.

Definition. Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$.

1. Die *Feinheit* von Z ist
$$\mu(Z) := \max_{1 \le j \le n} (x_j - x_{j-1}).$$

2. Seien $\xi_j, j = 1, \ldots, n$ beliebige Punkte in den Teilintervallen, d.h. $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j), j = 1 \ldots, n$ (so genannte *Stützpunkte*). Die *Riemannsche Summe* von f bezüglich Z und $(\xi_j)_{j=1}^n$ ist
$$S(f, Z, (\xi_j)_{j=1}^n) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Satz 11.5 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für jede Zerlegung Z mit Feinheit $\mu(Z) < \delta$ und für jede Wahl von Stützpunkten $(\xi_j)_{j=1}^n$ in Z gilt
$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S(f, Z, (\xi_j)_{j=1}^n) \right| < \varepsilon.$$

11.1 Integrationsregeln und Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz 11.6 (Linearität und Monotonie) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen $\lambda f, f + b\, :\, [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und es gilt
$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda f)(x)\,dx \;&=\; \lambda \int_a^b f(x)\,dx, \\ \int_a^b (f+g)(x)\,dx \;&=\; \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \end{aligned}$$
Falls $f \le g$, dann gilt
$$\int_a^b f(x)\,dx \;\le\; \int_a^b g(x)\,dx.$$

Definition. Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definieren wir den positive Teil f_+ und den negativen Teil f_-:

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad f_-(x) := \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) < 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist also $f_+, f_- \geq 0$, $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$.

Satz 11.7 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann sind f_+, f_- und $|f|$ integrierbar und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung. Die obige Ungleichung heißt die *Dreiecksungleichung für das Riemann-Integral.*

Satz 11.8 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) Seien $\varphi : [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein $x_0 \in [a,b]$, sodass

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x \ = \ f(x_0) \int_a^b \varphi(x)\ \mathrm{d}x.$$

Insbesondere (mit $\varphi = 1$) existiert ein $x_0 \in [a,b]$, sodass

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \ = \ f(x_0)(b-a).$$

Bemerkung. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung sagt, dass der Flächeninhalt unter dem Graphen von f gleich ist dem Flächeninhalt des Rechteckes mit Seitenlängen $b-a$ und $f(x_0)$ für ein $x_0 \in [a,b]$.

Satz 11.9 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in (a,b)$. f ist integrierbar über $[a,b]$ genau dann, wenn f über $[a,x_0]$ und über $[x_0,b]$ integrierbar ist. Es gilt dann

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \ = \ \int_a^{x_0} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{x_0}^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Definition. Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 > x_2$ definieren wir

$$\int\limits_{x_1}^{x_1} f(x)\ \mathrm{d}x := 0, \quad \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\ \mathrm{d}x := -\int\limits_{x_2}^{x_1} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

11.2 Integration und Differentiation

Satz 11.10 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Für $x \in [a,b]$ sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dann ist $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $F' = f$.

Bemerkung. Das obige Integral $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ heißt manchmal das *unbestimmte Integral* von f. Es ist „unbestimmt“ wegen der Variable x als eine Integrationsgrenze.

Definition. Eine differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, falls

$$F' = f.$$

Bemerkung. Das unbestimmte Intergal von f ist also eine Stammfunktion von f. Satz 11.10 sagt außerdem, dass jede stetige Funktion eine Stammfunktion hat!

Satz 11.11 Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann sind für eine Funktion $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ äquivalent:

1. G ist eine Stammfunktion von f.
2. $F - G$ ist konstant auf $[a, b]$.

Bemerkung.
- Alle Stammfunktionen einer Funktion f sind also bis auf eine Konstante gleich.
- Wir bezeichnen mit $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (kurz mit $\int f$) die Menge aller Stammfunktionen von f. Also, falls $F' = f$, dann

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}.$$

Kurz schreibt man $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F + c$. Oft wird sogar c weggelassen, wie z.B. in [4].

Satz 11.12 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechung) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\ \mathrm{d}x \ =\ F(x_2) - F(x_1) =: F(x)\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Bemerkung. Insbesondere ist also $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \ =\ F(b) - F(a)$.

Beispiel.

1. $\int_a^b x^s\,\mathrm{d}x$ mit $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

   Es gilt

$$\int_a^b x^s\,\mathrm{d}x = \frac{1}{s+1} x^{s+1}\Big|_a^b \text{ für } \begin{cases} a, b \in \mathbb{R}, & \text{falls } s \in \mathbb{N}_0, \\ a, b > 0 \text{ oder } a, b < 0, & \text{falls } s \in \{-2, -3, \dots\}, \\ a, b > 0, & \text{falls } s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2. $\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x|\Big|_a^b \text{ für } a, b > 0 \text{ oder } a, b < 0.$$

   Es darf aber nicht 0 im Integrationsintervall liegen, da $1/x$ in $x = 0$ nicht stetig ist und wir Satz 11.12 nicht benutzen dürfen.

3. $\int_a^b \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_a^b$, $\int_a^b \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)\Big|_a^b$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

4. $\int_a^b \exp(x)\,\mathrm{d}x = \exp(x)\Big|_a^b$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

5. $\int_a^b \tan(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\log(\cos(x))\Big|_a^b$ für alle $a, b \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Es ist nicht immer einfach die Stammfunktion zum gegebenen f zu finden. Oft hilft es eine Transformation (Substitution) der Integrationsvariablen durchzuführen. Diese basiert auf der Kettenregel.

Satz 11.13 (Substitutionsregel) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (d.h. differenzierbar in $[a, b]$ und die Ableitung $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig). Gelte weiter $\varphi([c, d]) \subset [a, b]$. Dann gilt

$$\int_c^d f(\varphi(y))\varphi'(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung. Die Substitutionsregel hat zwei Anwendungen (links nach rechts, bzw. rechts nach links):

(A) Die Aufgabe ist $I := \int_c^d f(\varphi(y))\varphi'(y)\,\mathrm{d}y$ zu berechnen und es scheint schwierig die Stammfunktion von $f(\varphi(y))\varphi'(y)$ direkt zu finden. Mit der Substituion $x = \varphi(y)$ gilt aber

$$I = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(B) Die Aufgabe ist $I := \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ zu berechnen und es scheint schwierig die Stammfunktion von $f(x)$ direkt zu finden. Man sucht eine passende Funktion φ, sodass nach der Transformation $x = \varphi(y)$ die Stammfunktion einfacher zu finden ist. Es ist

$$I = \int_c^d f(\varphi(y))\varphi'(y)\,\mathrm{d}y, \text{ wobei } \varphi(c) = \alpha, \varphi(d) = \beta.$$

Falls φ invertierbar (streng monoton) ist, dann ist

$$I = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(y))\varphi'(y)\,\mathrm{d}y.$$

Beispiel. In den folgenden kann man 1. und 2. als Beispiele der Anwendung A und 3. als ein Beispiel der Anwendung B interpretieren.

1. Für ein $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt
   - $\int_a^b f(y + c)\,\mathrm{d}y = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x$ (Substitution $x = \varphi(y) := y + c$)

- $\int_a^b f(cy)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x)\,\mathrm{d}x$ (Substitution $x = \varphi(y) := cy$)
- $\int_a^b yf(y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)\,\mathrm{d}x$ (Substitution $x = \varphi(y) := y^2$)

2. Für $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\varphi(y) \neq 0$ für alle $y \in [a,b]$ gilt

$$\int_a^b \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\,\mathrm{d}y = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x|\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$$

(Substitution $x = \varphi(y)$)

Eine Anwendung von diesem Beispiel ist das Integral $\int_a^b \tan(x)\,\mathrm{d}x$, welches wir oben berechnet haben ohne die formale Anwendung der Substitutionsregel.

3. Für $[a,b] \subset [-1,1]$ ist

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2})\Big|_a^b.$$

Dies folgt mit der Substitution $x = \sin(y)$ und mit der Anwendung der Identitäten $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)$ und $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Satz 11.14 (Partielle Integration) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; (fg)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei $(fg)\Big|_a^b := f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Bemerkung. Für die Stammfunktionen gilt also $\int fg' = fg - \int f'g$.

Beispiel. 1. $\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = (x-1)e^x$

2. $\int \log(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\log(x)\,\mathrm{d}x = x\log(x) - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x(\log x - 1)$

3.
$$\begin{aligned}\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\arctan x\,\mathrm{d}x &= x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y\\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+y) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\end{aligned}$$

4. $\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$

11.3 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir nur über kompakte Intervalle integriert. Hier werden wir das Integral verallgemeinern auf unbeschränkte Intervalle bzw. auf offene Intervalle, wenn z.B. f in einem Randpunkt von (a, b) nicht definiert ist, wie z.B. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ auf $(0, 1)$.

Definition. 1. Sei $I = [a, b)$ mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Dann heißt f *uneigentlich integrierbar über* I, falls f für jedes $z \in I$ integrierbar über $[a, z]$ ist und der Limes

$$\lim_{z \to b-} \int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x := \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert.

2. Sei $I = (a, b]$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Dann heißt f *uneigentlich integrierbar über* I, falls f für jedes $z \in I$ integrierbar über $[z, b]$ ist und der Limes

$$\lim_{z \to a+} \int_z^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert.

3. Sei $I = (a, b)$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Dann heißt f *uneigentlich integrierbar über* I, falls f für ein $x_0 \in I$ uneigentlich integrierbar über $(a, x_0]$ und über $[x_0, b)$ ist. Dann definieren wir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung. Für I wie in 3. ist f uneigentlich integrierbar über $(a, x_0]$ und $[x_0, b)$ für ein $x_0 \in I$ genau dann, wenn es uneigentlich integrierbar über $(a, x_0]$ und $[x_0, b)$ für alle $x_0 \in I$ ist.

Beispiel. 1. $f(x) := x^\alpha$ ist uneigentlich integrierbar über $[1, \infty)$ genau dann, wenn $\alpha < -1$.

2. $f(x) := x^\alpha$ ist uneigentlich integrierbar über $(0, 1]$ genau dann, wenn $\alpha > -1$.

3. $f(x) := x^\alpha$ ist für kein $\alpha \in \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar über $\mathbb{R}$. Dies folgt aus 1. und 2.

4. $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ ist uneigentlich integrierbar über $\mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi$.

Literatur

[1] S. Abbott. Understanding Analysis. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2010.

[2] H. Amann and J. Escher. Analysis 1. Analysis. Birkhäuser, 2002.

[3] A. Deitmar. Analysis. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2014.

[4] O. Forster. Analysis 1. Springer-Spektrum, 2016.

[5] W. Kaballo. Einführung in die Analysis I. Spektrum, Akad. Verl., 2000.