Übungsblatt 6

wird besprochen am: 7.12.2012

Problem 1: Seien

$$u(x,\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{N} u_n(x)\varepsilon^n, \quad v(x,\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{N} v_n(x)\varepsilon^n$$

für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig in x. Angenommen u_0 und v_0 sind beschränkt, zeige, daß

$$u(x,\varepsilon)v(x,\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{j=0}^{n} u_{n-j}(x)v_j(x) \right) \varepsilon^n$$

für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig in x.

Problem 2: Sei $u(x;\cdot) : \varepsilon \to u(x;\varepsilon)$ (als Funktion von ε) r mal stetig differenzierbar bezüglich ε auf $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ und sei $\frac{\partial^{N+1}u}{\partial x \partial \varepsilon^N}(x,\varepsilon)$ stetig auf $(x,\varepsilon) \in \Omega \times [0,\varepsilon_0]$ für eine kompakte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ für alle $p \leq r$. Zeige, daß für die Taylor-Entwicklung in $\varepsilon = 0$ mit $N \leq r-1$

$$u(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)\varepsilon^n + O(\varepsilon^{N+1}) \qquad (\varepsilon \to 0),$$

gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x)\varepsilon^n + O(\varepsilon^{N+1})$$

für $x \in \Omega$.

Problem 3: Mit Hilfe der regulären Störungsrechnung berechne die volle asymptotische Entwicklung in Potenzen von ε der Lösung des Anfangwertproblems

$$y'' + \varepsilon y' + 1 = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Berechne auch die exakte Lösung und vergleiche ihre Taylor-Entwicklung in ε mit der asympt. Entwicklung.

Problem 4: Mit Hilfe der regulären Störungsrechnung berechne die quadratische (bezüglich ε) Entwicklung der Wurzeln von

$$x^3 - (4+\varepsilon)x + 2\varepsilon = 0.$$

Argumentiere mit Hilfe des Satzes über die implizite Funktion (für genügend glatte Funktionen), dass der Approximationsfehler tatsächlich $O(\varepsilon^3)$ ist.