Übungsblatt 7

wird besprochen am: 14.12.2012

Problem 1:

(i) Berechne erst formal eine asymptotische Entwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$ für $x \to \infty$ der Lösung von

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx} + \frac{\lambda}{x^2}u = 0 \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und mit den Bedingungen } \lim_{x\to\infty} u(x) = 1, \lim_{x\to\infty} u'(x) = 0.$$

(ii) Rechtfertige die Entwicklung rigoros.

Schritte:

(a) Zeige mit Hilfe der Variation der Konstanten (behandle $\frac{\lambda}{x^2}u$ als eine Inhomogentität), dass

$$u(x) = 1 + \tfrac{\lambda}{2}\int_x^{\infty} \tfrac{u(t)}{t^2}(e^{2(x-t)} - 1)dt. \tag{0.1}$$

(b) Iteriere auf (0.1) (setze u wiederholt ein) um zu zeigen, dass $|u(x)| < 1 + \sum_{n=1}^{\infty}|I_n|$, wobei $|I_n| < \left(\frac{|\lambda|}{2}\right)^n \frac{1}{n!x^n}$. Deshalb $|u(x)| < e^{\frac{|\lambda|}{2x}}$. Es folgt, dass $|u(x)| \leq B_0$ für ein $B_0 > 0$ und x gross genug.

(c) Weil $|e^{2(x-t)} - 1| < 1$ für $t > x$, erhalten wir aus (0.1), dass $u(x) = 1 + u_1(x)$ mit $|u_1(x)| < \frac{B_1}{x}$ für $B_1 := \frac{|\lambda| B_0}{2}$.

(d) Setze $u(x) = 1 + u_1(x)$ in (0.1) ein um zu zeigen, dass $u_1(x) = -\frac{\lambda}{2x} + u_2(x)$ mit $|u_2(x)| \leq c\frac{|\lambda|}{x^2}$. Wiederholtes Einsetzen generiert die ganze asymptotische Reihe.