Institut für Analysis | Tomáš Dohnal
Technische Universität Dortmund | tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de


# Übungsblatt 8

wird besprochen am: 11.1.2013

**Problem 1:** Mit Hilfe des Gronwall-Lemmas beweise folgende Alternative zum Satz 3.5 aus der Vorlesung für das Problem

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + \varepsilon f(u), \quad u(0) = \alpha \in \mathbb{R}^n \tag{0.1}$$

mit $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $A$ beschränkt auf beschränkten Intervallen.

Diese Alternative liefert eine etwa schlechtere Schranke aber der Beweis funkzioniert automatisch für alle Normen.

**Theorem 1** *Falls $f$ global Lipschitz ist und die reguläre Störungsrechnung für (0.1) liefert $u_0(t) + \varepsilon u_1(t)$ mit $u_1(t)$ beschränkt auf $[0, t_*]$ für ein $t_* > 0$, dann*

$$\|u(t, \varepsilon) - u_0(t) - \varepsilon u_1(t)\| \le \varepsilon^2 M t e^{(A_\infty + \varepsilon L)t} \qquad \forall t \in [0, t_*],$$

*wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm in $\mathbb{R}^n$ und $L$ die Lipschitz-Konstante von $f$ sind, $A_\infty := \max_{t\in[0,t_*]} \|A(t)\|$ und $M := L \max_{t\in[0,t_*]} \|u_1(t)\|$.*

Bem.: The theorem actually holds for all $\varepsilon > 0$.

**Problem 2:** Für das Anfangswertproblem

$$\frac{du}{dt} + u = \varepsilon u^2 \text{ für } t > 0, \qquad u(0) = 1$$

berechne die asymptotische Approximation $u_0(t)+\varepsilon u_1(t)$ der Lösung mit Hilfe der regulären Störungsrechnung für $\varepsilon \to 0$. Formuliere dann die Abschätzung des Fehlers $R(t)$. Ist $R(t) = O(\varepsilon^2)$ für alle $t \ge 0$ möglich? Bestimme konkrete Werte aller Konstanten in der Fehlerabschätzung nach der Wahl eines Intervalls $D$ für die lokale Lipschitz-Stetigkeit von $f(u) = u^2$.

Kann man hier auch die exakte Lösung bestimmen?

**Problem 3:** Betrachte das Problem

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \varepsilon u^2(x), \qquad x \in \Omega \\ u(x) &= g(x) \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{0.2}$$

für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$ und mit einer glatten Funktion $g$. Angenommen die reguläre Störungsrechnung liefert die formale approximative (klassische) Lösung $u_0(x) + \varepsilon u_1(x)$, zeige, dass es eine Lösung $u$ von (0.3) gibt, für die gilt

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x) - u_0(x) - \varepsilon u_1(x)| < C\varepsilon^2$$

für alle $\varepsilon$ klein genug.

Benutze nicht einfach Satz 3.9 aus der Vorlesung, sondern mache seinen Beweis für dieses Beispiel nach.

**Problem 4:** Für das 2D-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= -\varepsilon u(x,y), \qquad x^2+y^2<1 \\ u(x,y) &= 1, \qquad x^2+y^2=1 \end{aligned} \tag{0.3}$$

finde die exakte Lösung und berechne mit Hilfe der regulären Störungsrechnung die Approximation $u_0(x,y)+\varepsilon u_1(x,y)$. Bestimme den Fehler durch direkte $\varepsilon$-Entwicklung der exakten Lösung.