Blatt 2

wird besprochen am 3.5.2018

Problem 1: Lösen Sie die Poisson-Gleichung in $\mathbb{R}^n$

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ formal mit Hilfe der Fourier-Transformation.

a) Unter welcher Bedingung an $\hat{f}$ liefert dies eine $H^2(\mathbb{R}^n)$-Lösung?

b) Reicht für $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ die Bedingung $|\hat{f}(k)| < c|k|^\alpha$ für alle $|k| < 1$ mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$?

c) Unter welcher Bedingung an $\hat{f}$ erfüllt die Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$?

d) Wie ändern sich diese Bedingungen für die Gleichung

$$-\Delta u(x) + au(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit $a > 0$?

Hinweis: Für $s \in \mathbb{N}_0$ ist $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn $(1+|.|^s)\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Und $\widehat{D^\alpha u}(k) = (\mathrm{i}k)^\alpha \widehat{u}(k)$ für alle Multi-Indices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq s$, falls $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie für (c), dass $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow g$ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.

Problem 2: Was sind die Dispersionsrelationen (der linearen Teile) folgender Gleichungen?

(i) Balkengleichung: $\partial_t^2 u + a\partial_x^4 u = 0, \qquad a > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}$

(ii) Kadomtsev-Petviashvili-Gl.: $\partial_{x_1}(\partial_t u + \partial_{x_1}^3 u + u\partial_{x_1} u) + \partial_{x_2}^2 u = 0, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}^2$

(iii) Wärmeleitungsgleichung: $\partial_t u = \Delta u, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}^n$

(iv) Coupled-Mode-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}(\partial_t u + \partial_x u) + \kappa v + (|u|^2 + 2|v|^2)u &= 0 \\ \mathrm{i}(\partial_t v - \partial_x v) + \kappa u + (|v|^2 + 2|u|^2)v &= 0 \end{aligned}$$

mit $\kappa > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}$

(v) Camassa-Holm-Gleichung: $\partial_t u + 2\kappa\partial_x u - \partial_t\partial_x^2 u + 3u\partial_x u = 2\partial_x u\partial_x^2 u + u\partial_x^3 u$, $\kappa > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}$

Folgende Probleme sollten nach der Vorlesung am 25.4. klar sein:

- Zeichnen Sie für (i),(iv) und (v) qualitativ die Lösung nach einer langen Zeit, falls die Anfangsdaten ein lokalisierter Impuls sind (analog zur Vorlesung).
- Welche Wellenzahlen wandern für (ii) in Richtung $(1,0)^T$ (Osten), $(-1,0)^T$ (Westen) und welche in Richtung $(-1,1)^T$ (Nord-Westen)?

Problem 3: Unter welchen Vorraussetzungen an u_0 erfüllt die durch die Fouriertransformation erhaltene Lösung des Anfangswertproblems für die lineare Kadomtsev-Petviashvili-Gleichung aus Aufgabe 1 (ii) mit $u(\cdot,0)=u_0$, dass $\partial_{x_1}\partial_t u, \partial_{x_1}^4 u, \partial_{x_2}^2 u \in C(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R})$?

Problem 4: (Methode der stationären Phase)

Verstehen Sie den Beweis für die Methode der stationären Phase (Satz B.7 im Skript) und schreiben Sie im Detail den Beweis von

Theorem 0.1 *Sei* $c\in\mathbb{R}, f\in C^1(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R}), h\in C^N(\mathbb{R}), f(c)\neq 0, h'(t)\neq 0$ *für alle* $t\in\mathbb{R}\setminus\{c\}$, $h'(c)=h''(c)=\cdots=h^{(N-1)}(c)=0, h^{(N)}(c)\neq 0, (f/h')'\in L^1(\mathbb{R})$. *Dann gilt für* $I(x):=\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}xh(t)}f(t)\,\mathrm{d}t$

$$
\begin{aligned}
I(x) &\sim \frac{2}{N}\Gamma\left(\frac{1}{N}\right) f(c)e^{\mathrm{i}xh(c)}\cos\left(\frac{\pi}{2N}\right)\left(\frac{N!}{|h^{(N)}(c)|x}\right)^{\frac{1}{N}} \quad (x\to\infty) \text{ für } N \text{ ungerade},\\
&\sim \frac{2}{N}\Gamma\left(\frac{1}{N}\right) f(c)e^{\mathrm{i}xh(c)}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2N}\,sign(h^{(N)}(c))}\left(\frac{N!}{|h^{(N)}(c)|x}\right)^{\frac{1}{N}} \quad (x\to\infty) \text{ für } N \text{ gerade}.
\end{aligned}
$$