Blatt 3

wird besprochen am 17.5.2018

Problem 1: Betrachten Sie das System

$$\partial_t u = Q(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})u, \qquad u(x,t) \in \mathbb{C}^m, x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$
$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

mit einem Polynom $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^{m\times m}, m \in \mathbb{N}$, wobei für alle $k \in \mathbb{R}^n$ die Matrix $Q(\mathrm{i}k_1, \dots, \mathrm{i}k_n)$ diagonalisierbar ist und rein imaginäre Eigenwerte hat.
Zeigen Sie, dass die L^2-Norm $\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^m \|u_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ in der Zeit erhalten bleibt.

Problem 2: Betrachten Sie die lineare Korteweg-de-Vries Gleichung

$$\partial_t u + c\partial_x u + \mu\partial_x^3 u = 0, \qquad c, \mu > 0, x \in \mathbb{R}, t > 0$$

mit Anfangsdaten $u(\cdot, 0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R})$.

Was ist die Asymptotik niedrigster Ordnung von $u(x,t)$ für $t \to \infty, \frac{x}{t} = v$ mit

(a) $v = c$,

(b) $v < c$,

(c*) $v > c$?

Wie schnell fällt die Amplitude der Lösung ab?

Hinweis: (a), (b) Methode der stationären Phase. Bei (c) kann man Lemma B.5 aus dem Skript (über die nichtstationäre Phase) benutzen und zusätzliche Voraussetzungen an u_0 stellen.

Problem 3: (Ausbreitung eines Wellenpakets durch Dispersion)
Wir betrachten für die Schrödinger-Gleichung ein Wellenpaket, dessen Trägerwelle die Wellenzahl k_0 hat. In dieser Aufgabe wird gezeigt, dass die Einhüllende des Wellenpakets mit der Zeit t durch Dispersion in der Breite wächst.

- Berechnen Sie die Lösung $u(x,t)$ der Schrödinger-Gleichung

  $$\mathrm{i}\partial_t u = -\partial_x^2 u, \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

  mit Anfangsdaten

  $$u(x,0) = e^{-\alpha x^2} e^{\mathrm{i}k_0 x},$$

  $\alpha > 0, k_0 \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie die effektive Breite des Wellenpakets in der Zeit t. Für eine Funktion $f(y)$ mit der Gauß'schen Amplitude $|f(y)| = ce^{-\mu y^2}$ mit $\mu > 0$ ist die effektive Breite gegeben durch $1/\sqrt{\mu}$.

- Zeigen Sie, dass sich das Wellenpaket mit der Geschwindigkeit $v_g(k_0) = 2k_0$ bewegt und wie $t^{-1/2}$ abfällt.

Hinweis: Für $J(\kappa) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\kappa y} e^{-ay^2+by}\, dy$ untersucht man die DGL erster Ordnung, die J erfüllt.

Problem 4: (Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Coupled-Mode Gleichungen)
Zeigen Sie, dass das System der linearen Coupled-Mode Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{i}(\partial_t u + \partial_x u) + \kappa v &= 0 \\ \mathrm{i}(\partial_t v - \partial_x v) + \kappa u &= 0 \end{aligned}$$

endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit hat. Sie dürfen beliebige Glattheit der Lösung voraussetzen.
Hinweis: Transformation zur Klein-Gordon-Gleichung.

Problem 5:
Spielen Sie mit dem Matlab-Program für die lineare Schrödinger-Gleichung, cf. Stud-IP bzw. die Homepage.