Blatt 7

Abgabe: 8.2.2016, Einzelabgabe

Problem 1: Betrachte für die lineare Boussinesq-Gleichung

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - \partial_x^4 u,\ x \in \mathbb{R} \tag{0.1}$$

langsam modulierte Wellenpaketlösungen

$$u(x,t) \sim A(X,T)e^{\mathrm{i}(k_0 x - \omega_0 t)} + \text{c.c.} =: u_{as}(x,t)$$

mit $X = \varepsilon(x - v_g t), T = \varepsilon^2 t, 0 < \varepsilon \ll 1$ und mit $k_0, \omega_0, v_g = \omega'(k_0) \in \mathbb{R}$ verbunden durch die Dispersionsrelation. Leite formal die lineare Schrödingergleichung für A her:

$$\mathrm{i}\partial_T A + \frac{1}{2}\omega''(k_0)\partial_X^2 A = 0. \tag{0.2}$$

Problem 2: Schreibe die partielle Differentialgleichung für den Fehler $R := u - u_{as}$ aus Problem 1. Das Vorgehen dabei ist analog zur Vorlesung.

Problem 3: Beweise, dass falls A eine Lösung von (0.2) ist, so dass $\partial_T^p \partial_X^q A \in C([0,T_0], H^1(\mathbb{R},\mathbb{C}))$ mit $T_0 > 0$ für alle $p, q \in \mathbb{N}_0, p \le 2, q \le 4$, und falls u die Lösung von (0.1) mit

$$u(x,0) = u_{as}(x,0),\ \partial_t u(x,0) = \partial_t u_{as}(x,0)$$

ist, dann gibt es ein $C > 0$, so dass für beliebige $\varepsilon > 0$ gilt

$$\|\partial_t R(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_x R(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \le C\varepsilon^{1/4} \quad \text{für alle } t \in [0, T_0\varepsilon^{-2}].$$

Hinweis: Ähnlich zum Beweis für die NLS in der Vorlesung (nur viel einfacher :-). Es gibt keine obere Schranke für ε wegen der Linearität des Problems.

Problem 4: Betrachte die lineare Schrödinger-Gleichung mit einem 2π-periodischen Potential V:

$$\mathrm{i}\partial_t u + \partial_x^2 u - V(x)u = 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Formuliere das Bloch-Eigenwert-Problem auf der Zelle $[0, 2\pi]$ mit der zugehörigen Brillouin-Zone $\mathbb{B} := (-1/2, 1/2]$. Nenne $\omega_n(k), n \in \mathbb{N}$ die Eigenwerte von $-(\partial_x + \mathrm{i}k)^2 + V(x)$ und $p_n(x,k)$ die (periodischen) Eigenfunktionen. Wähle ein $k_0 \in \mathbb{B}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ und sei $\omega_0 := \omega_{n_0}(k_0), v_g := \omega'_{n_0}(k_0)$. Mit der Bloch-Eigenfunktion $p_{n_0}(x,k_0)$ bauen wir den Wellenpaket-Ansatz

$$u_{\text{app}}(x,t) := \varepsilon A(\varepsilon(x - v_g t), \varepsilon^2 t) p_{n_0}(x,k_0) e^{\mathrm{i}(k_0 x - \omega_0 t)}.$$

(a) Vorausgesetzt $\text{supp}(\hat{A}(\cdot,T))) \subset [-L, L]$, $L > 0$, wende die Bloch-Transformation an den Ansatz und an die Gleichung. Für den Ansatz erhalte

$$\tilde{u}_{\text{app}}(x,k,t) = \widehat{A}(\varepsilon^{-1}(k - k_0), \varepsilon^2 t) p_{n_0}(x,k_0) e^{-\mathrm{i}(\omega_0 + (k-k_0)v_g)t} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{B}.$$

(b) Entwickle den Ansatz und $\tilde{u}(\cdot,k,t)$ in den Eigenfunktionen $(p_n(\cdot,k))_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\tilde{u}_{\text{app}}(x,k,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} U_n^{\text{app}}(k,t)p_n(x,k), \;\; \tilde{u}(x,k,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} U_n(k,t)p_n(x,k).$$

Zeige, dass für die Koeffizienten $U_n(k,t)$ gilt

$$\mathrm{i}\partial_t U_n(k,t) - \omega_n(k)U_n(k,t) = 0, n \in \mathbb{N}. \tag{0.3}$$

(c) Betrachte die n_0-te Komponente des Residuums, d.h. $\mathrm{Res}_{n_0} := \mathrm{i}\partial_t U_{n_0}^{\text{app}} - \omega_{n_0}(k)U_{n_0}^{\text{app}}$. Setze voraus, dass $\omega_{n_0} \in C^3(\mathrm{int}(\mathbb{B}))$ und $k \mapsto p_{n_0}(\cdot,k)$ ist Lipschitz in $L^2(0,2\pi)$, d.h. es gibt ein $L > 0$, sodass $\|p_{n_0}(\cdot,k_1) - p_{n_0}(\cdot,k_2)\|_{L^2(0,2\pi)} \leq L|k_1 - k_2|$ für alle $k_1, k_2 \in \mathbb{B}$. Zeige, dass falls A eine Lösung der linearen Schrödinger-Gleichung $\mathrm{i}\partial_T A + \frac{1}{2}\omega_{n_0}''(k_0)A = 0$ mit $\mathrm{supp}(\hat{A}) \subset [-L,L]$ und $\hat{A}(\cdot,T), \partial_T\hat{A}(\cdot,T) \in L^\infty(-L,L)$ für alle $T \in \mathbb{R}$ ist, dann gilt $\|\mathrm{Res}_{n_0}(\cdot,t)\|_{L^2} \leq C\varepsilon^{3/2}$.

Hinweise:

- Taylor-Entwicklung von $\omega_{n_0}(k)$ um $k = k_0$.
- $\langle p_{n_0}(\cdot,k_0), p_{n_0}(\cdot,k)\rangle_{L^2(0,2\pi)} = 1 + \langle p_{n_0}(\cdot,k_0), p_{n_0}(\cdot,k) - p_{n_0}(\cdot,k_0)\rangle_{L^2(0,2\pi)}$