TOMÁŠ DOHNAL
tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de

Blatt 3

Abgabe: 25.11.2013

Problem 1: (Problem 2 aus Blatt 2) Für das System

$$\begin{aligned} \partial_t u &= Q(\partial_x)u, \qquad u(x,t) \in \mathbb{C}^m, x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

mit einem Polynom $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{m\times m}, m \in \mathbb{N}$ bestimme die Asymptotik niedrigster Ordnung für $t \to \infty, x/t = c \in \mathbb{R}$ unter der Voraussetzung, dass für alle $k \in \mathbb{R}$ die Matrix $Q(\mathrm{i}k)$ diagonalisierbar ist, imaginäre Eigenwerte $-\mathrm{i}W_j(k), j = 1, \dots, m$ hat und

$$W_j''(k) \neq 0 \quad \text{für alle } k \text{ mit } W_j'(k) = c \quad \text{und alle} \quad j = 1, \dots, m.$$

Hinweis: Verallgemeinere das Resultat für $m = 1$ aus der Vorlesung.

Problem 2: Betrachte das System

$$\begin{aligned} \partial_t u &= Q(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})u, \qquad u(x,t) \in \mathbb{C}^m, x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

mit einem Polynom $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^{m\times m}, m \in \mathbb{N}$, wobei für alle $k \in \mathbb{R}^n$ die Matrix $Q(\mathrm{i}k_1, \dots, \mathrm{i}k_n)$ diagonalisierbar ist und imaginäre Eigenwerte $-\mathrm{i}W_j(k), j = 1, \dots, m$ hat. Zeige, dass die L^2-Norm $\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^m \|u_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ erhalten in der Zeit ist.

Problem 3: (Rechnung zu Problem 4 aus Blatt 2) Mit Hilfe des Cauchy-Integralsatzes berechne das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\alpha x^3} dx$$

for $\alpha \in \mathbb{R}$. Für den Teil des Integrationspfades, wo der Integralbeitrag gegen 0 konvergieren soll, beweise diese Konvergenz.

Problem 4: Bestimme die Phasenlinien und Gruppenlinien für

1. die Klein-Gordon Gleichung
$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - au$$
mit $a > 0$,

2. die 1D-Tiefwasserwellen, die durch die Dispersionsrelation $W(k) = \sqrt{gk}$ mit $k \geq 0$ und mit der Erdbeschleunigung g beschrieben sind.

TOMÁŠ DOHNAL
tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de

Problem 5: (Ausbreitung eines Wellenpakets durch Dispersion) Hier betrachten wir in der Schrödinger-Gleichung einen Wellenpaket mit der Trägerwelle mit der Wellenzahl k_0 und untersuchen die Entwicklung der Breite des Wellenpakets. Wir werden sehen, dass Dispersion eine in der Zeit wachsende Breite verursacht.

Für die Anfangsdaten

$$u(x,0) = e^{-\alpha x^2} e^{\mathrm{i} k_0 x}$$

mit $\alpha > 0, k_0 \in \mathbb{R}$ berechne die Lösung $u(x,t)$ der Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\partial_t u = -\partial_x^2 u, \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

und bestimme die effektive Breite des Wellenpakets in der Zeit t. Für eine Funktion $f(y)$ mit der Gaussischen Amplitude $|f(y)| = ce^{-\mu y^2}$ mit $\mu > 0$ heisst die effektive Breite $1/\sqrt{\mu}$.

Beobachte auch, dass der Wellenpaket sich mit der Geschwindigkeit $v_g(k_0) = 2k_0$ bewegt und wie $t^{-1/2}$ abfällt.

Hinweis: Nutze die Identität (die einfach nachzurechnen ist)

$$(e^{-\beta k^2 + \gamma k})^\vee(x) = \sqrt{\frac{2}{|\beta|}} e^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\frac{\gamma x}{\beta} - \arg(\beta))} e^{-\frac{x^2 - \gamma^2}{4\beta}}$$

für $\beta \in \mathbb{C}, \Re(\beta) > 0, \gamma \in \mathbb{R}$.