INSTITUT FÜR ANALYSIS — TOMÁŠ DOHNAL
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND — tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de

Blatt 7

Abgabe: 3.2.2014

Problem 1: Für die lineare Boussinesq-Gleichung

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - \partial_x^4 u, \; x \in \mathbb{R} \tag{0.1}$$

betrachte langsam modulierte Wellenpaket-Lösungen

$$u(x,t) \sim A(X,T)e^{\mathrm{i}(k_0 x - \omega_0 t)} + \text{c.c.} =: u_{as}(x,t)$$

mit $X = \varepsilon(x - v_g t), T = \varepsilon^2 t, 0 < \varepsilon \ll 1$ und wo $k_0, \omega_0, v_g = \omega'(k_0) \in \mathbb{R}$ durch die Dispersionsrelation verbunden sind. Leite formal die lineare Schrödinger-Gleichung für A her:

$$\mathrm{i}\partial_T A + \frac{1}{2}\omega''(k_0)\partial_X^2 A = 0. \tag{0.2}$$

Problem 2: Schreibe die partielle Differentialgleichung für den Fehler $R := u - u_{as}$ aus Problem 1.

Problem 3: Beweise, dass falls A eine Lösung von (0.2) ist sodass $\partial_T^p \partial_X^q A \in C([0,T_0], H^1(\mathbb{R},\mathbb{C}))$ mit $T_0 > 0$ für alle $p, q \in \mathbb{N}_0, p \leq 2, q \leq 4$ und falls u die Lösung von (0.1) mit

$$u(x,0) = u_{as}(x,0), \; \partial_t u(x,0) = \partial_t u_{as}(x,0)$$

ist, dann gibt es ein $C > 0$, so dass für beliebige $\varepsilon > 0$ gilt

$$\|\partial_t R(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_x R(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^{1/4} \quad \text{für alle } t \in [0, T_0\varepsilon^{-2}].$$

Hinweis: Ähnlich zum Beweis für die NLS in der Vorlesung (nur viel einfacher :-). Es gibt keine obere Schranke für ε wegen der Linearität des Problems.

Problem 4: (1-Soliton-Lösung der 1D NLS.) [*freiwillige Aufgabe*] Betrachte

$$\mathrm{i}\partial_t u + \partial_x^2 u + 2|u|^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nutze den Ansatz

$$u(x,t) = e^{\mathrm{i}((c/2)x - st)} v(x - ct), \quad c, s \in \mathbb{R}$$

mit $v(\xi), v'(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$.

Schreibe die gewöhnliche Differentialgleichung für v, integriere sie und finde:

$$v(\xi) = \sqrt{\alpha}\,\mathrm{sech}(\sqrt{\alpha}(\xi - \xi_0)), \; \alpha = (c^2/4) - s, \xi = x - ct$$

für beliebige $\xi_0 \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Umformulierung in $w := 1/v$. Identität $(\cosh^{-1}(x/a))' = (x^2 - a^2)^{-1/2}$, wobei $\cosh^{-1}(y)$ die inverse Funktion zu $y = \cosh(x)$ für $x \geq 0$ ist.