Institut für Analysis — Tomáš Dohnal
Technische Universität Dortmund — Lisa Helfmeier
Klassische Theorie der partiellen Differentialgleichungen — SoSe 16

16.8.2016, 9:00-12:00

Klausur

Allgemeine Hinweise: Begründen Sie alle Schritte möglichst detailliert. Erklären Sie insbesondere alle Vertauschungen von Grenzübergängen.

Aufgabe 1: (10 P) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet.

(a) (6 P) Definieren Sie die Greensche Funktion G für den Laplace-Operator zum Dirichlet-Problem auf Ω.

(b) (4 P) Angenommen G existiert, wie lautet die Darstellung der klassischen $C^2(\overline{\Omega})$-Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega \\ u(x) &= h(x), \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $f \in C(\Omega), h \in C(\partial\Omega)$?

Erklären Sie alle Ausdücke, die Sie benutzen, möglichst explizit.

Aufgabe 2: (13 P) Sei $R > 0, x_0 \in \mathbb{R}^n, u \in C^2(\overline{B_R(x_0)}, \mathbb{R})$ und $-\Delta u \leq 0$ in $B_R(x_0)$, wobei $B_R(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < R\}$. Zeigen Sie, dass der Oberflächenmittelwert $m_R(x_0; u) := \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u(x) \,\mathrm{d}S(x)$ die Ungleichung

$$m_R(x_0; u) \geq u(x_0)$$

erfüllt.

Aufgabe 3: (10 P) Sei $u \in C^2(\overline{B_1(0)}, \mathbb{R})$ harmonisch und $|u(x)| \leq M$ für alle $x \in B_1(0)$ und ein $M > 0$. Zeigen Sie, dass für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ folgende Abschätzung für die D_x^α-Ableitung gilt:

$$|D_x^\alpha u(0)| \leq M \int_{\partial B_1(0)} |D_x^\alpha K(0, y)| \,\mathrm{d}S(y),$$

wobei K der Poisson-Kern für die Einheitskugel ist.

Aufgabe 4: (12 P) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, ν der äußere Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega$, $T > 0$, $f \in C(\overline{\Omega \times (0,T)}, \mathbb{R})$, $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ und $h \in C(\partial\Omega \times [0, T))$.

Zeigen Sie mit Hilfe der Energiemethode, dass die $C^{2,1}(\overline{\Omega \times (0,T)}, \mathbb{R})$-Lösung des folgenden Anfangsrandwertproblems eindeutig ist:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in \Omega \\ \partial_\nu u(x,t) &= h(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \end{aligned}$$

Aufgabe 5: (18 P) Berechnen Sie mit Hilfe der Eigenfunktionentwicklung die Lösung von

$$\begin{aligned}\partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) &= 1, \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty)\\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in [0,\pi]\\ \partial_x u(0,t) = \partial_x u(\pi,t) &= 0, \quad t \in [0,\infty),\end{aligned}$$

wobei $u_0 \in C^1([0,\pi])$. Skizzieren Sie dann den Beweis, dass das gegebene u eine klassische $C^{2,1}((0,\pi)\times(0,\infty)) \cap C([0,\pi] \times [0,\infty))$-Lösung ist.

Aufgabe 6: (11 P) Sei $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$ mit $g, h, |\nabla g| \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ und u sei die Lösung der Wellengleichung

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)\\ u(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}^3\\ \partial_t u(x,0) &= h(x), \quad x \in \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Zeigen Sie die Abschätzung

$$|u(x,t)| \le c(1+t) \quad \text{für alle } (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$$

mit einem $c > 0$.

Aufgabe 7: (12 P) Leiten Sie die d'Alembert-Formel für die Lösung der Wellengleichung in $\mathbb{R}$ mit den Anfangsdaten $u(x,0) = g(x), \partial_t u(x,0) = h(x)$ aus der Lösung der Transportgleichung her.

Aufgabe 8: (14 P)

(a) (7 P) Bestimmen Sie die explizite Form der Lösung mit Verdünnungswelle zum Problem

$$\begin{aligned}\partial_t u(x,t) + u^3 \partial_x u(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)\\ u(x,0) &= \begin{cases} 0, & x \le 0\\ 2, & x > 0\end{cases}.\end{aligned}$$

(b) (7 P) Zeichnen Sie graphisch mit Hilfe der Charakteristiken die zulässige Schock-Lösung zu

$$\begin{aligned}\partial_t u(x,t) + u^3 \partial_x u(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)\\ u(x,0) &= \begin{cases} 0, & x \le 0\\ 2, & x \in (0,1)\\ 1, & x \ge 1\end{cases}.\end{aligned}$$

Begründen Sie die Schock-Trajektorie und für die Teile, wo der Schock gerade ist, bestimmen Sie die Steigung genau.