Handout: Vertauschung von Grenzübergängen

1 Resultate basierend auf der gleichmäßigen Konvergenz oder gleichmäßigen Stetigkeit

Theorem 1.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $u, u_k \in C(\Omega, \mathbb{R}), k \in \mathbb{N}$, sodass $u_k \to u$ gleichmäßig in Ω für $k \to \infty$. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $K \in \mathbb{N}$, sodass $|u(x) - u_k(x)| < \varepsilon/|\Omega|$ für alle $x \in \Omega$ und $k > K$. Für $k > K$ gilt deshalb $\left|\int_\Omega u_k(x) - u(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_\Omega |u_k(x) - u(x)|\,\mathrm{d}x \le \varepsilon$. □

Theorem 1.2. ***(Stetigkeit einer Integralfamilie)*** *Seien $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen, Ω_2 beschränkt und $u : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann ist $v : \Omega_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{\Omega_2} u(x,y)\,\mathrm{d}y$ gleichmäßig stetig.*

Beweis. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, sodass $|u(x,y) - u(x',y')| < \varepsilon/|\Omega_2|$, falls $|x - x'|, |y - y'| < \delta$. Deswegen $|v(x) - v(x')| \le \int_{\Omega_2} |u(x,y) - u(x',y)|\,\mathrm{d}y < \varepsilon$, falls $|x - x'| < \delta$. □

Theorem 1.3. ***(Ableitung einer Integralfamilie)*** *Seien $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen, Ω_2 beschränkt und $u, \partial_{x_i} u : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann ist $v : \Omega_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{\Omega_2} u(x,y)\,\mathrm{d}y$ stetig partiell nach x_i differenzierbar auf Ω_1 und*

$$\partial_{x_i} v(x) = \int_{\Omega_2} \partial_{x_i} u(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Beweis. Wähle $x \in \Omega_1, y \in \Omega_2$. Für eine beliebige reelle Nullfolge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt es nach dem Mittelwertsatz eine Folfe $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|\delta_k| \le |h_k|$ und

$$\frac{u(x + h_k e_i, y) - u(x,y)}{h_k} = \partial_{x_i} u(x + \delta_k e_i, y).$$

Aus der gleichm. Stetigkeit von $\partial_{x_i} u$ folgt dann

$$\left|\frac{u(x + h_k e_i, y) - u(x,y)}{h_k} - \partial_{x_i} u(x,y)\right| \le \varepsilon$$

für alle $y \in \Omega_2$ und $k \ge K$ (für ein $K = K(\varepsilon)$). Zuletzt gilt für $k \ge K$

$$\left|\frac{v(x + h_k e_i) - v(x)}{h_k} - \int_{\Omega_2} \partial_{x_i} u(x,y)\,\mathrm{d}y\right| \le \int_{\Omega_2} \left|\frac{u(x + h_k e_i, y) - u(x,y)}{h_k} - \partial_{x_i} u(x,y)\right|\,\mathrm{d}y \le \varepsilon|\Omega_2|.$$

□

2 Resultate basierend auf der majorisierten Konvergenz

Theorem 2.1. *(**majorisierte Konvergenz - Satz von Lebesgue**) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge (Lebesgue-)messbarer Funktionen mit $f_n : \Omega \to [-\infty, \infty]$. Falls $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ für fast alle $x \in \Omega$, und es existiert ein $g \in L^1(\Omega, (0,\infty))$, sodass $|f_n(x)| < g(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und fast alle $x \in \Omega$, dann ist $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n(x) - f(x)| \,\mathrm{d}x = 0.$$

Dies impliziert $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$.

Theorem 2.2. *(**Stetigkeit einer Integralfamilie**) Seien $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ messbar und $u : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ erfülle folgende drei Bedingungen*

(i) die Funktion $y \mapsto u(x,y)$ ist für alle $x \in \Omega_1$ messbar,

(ii) die Funktion $x \mapsto u(x,y)$ ist für fast alle $y \in \Omega_2$ stetig,

(iii) u hat eine (in x) gelichmäßige L^1-majorante, d.h. es gibt ein $g \in L^1(\Omega_2)$ mit $|u(x,y)| \leq g(y)$ für alle $x \in \Omega_1$ und fast alle $y \in \Omega_2$.

Dann ist $u(x,\cdot) \in L^1(\Omega_2)$ für alle $x \in \Omega_1$ und $v : \Omega_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{\Omega_2} u(x,y)\,\mathrm{d}y$ ist stetig auf Ω_1.

Beweis. Wähle $x \in \Omega_1$ und eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ mit $x_k \to x$. Setze $u_k(y) := u(x_k, y)$. Es gilt $u_k(y) \to u(x,y)$ für fast alle $y \in \Omega_2$ und $|u_k(y)| \leq g(y)$ für alle k und fast alle $y \in \Omega_2$. Dann folgt aus Theorem 2.1, dass $u(x,\cdot) \in L^1(\Omega_2)$ und $\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_2} u_k(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega_2} u(x,y)\,\mathrm{d}y$. □

Theorem 2.3. *(**Ableitung einer Integralfamilie**) Sei $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ messbar und $u : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ sei für alle $x \in \Omega_1$ und fast alle $y \in \Omega_2$ nach x_i partiell differenzierbar. Falls $u, \partial_{x_i} u : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ die Bedingungen (i)-(iii) aus Theorem 2.2 erfüllen, dann ist $v : \Omega_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{\Omega_2} u(x,y)\,\mathrm{d}y$ nach x_i stetig partiell differenzierbar in Ω_1 und*

$$\partial_{x_i} v(x) = \int_{\Omega_2} \partial_{x_i} u(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Beweis. Für eine beliebige reelle Nullfolge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt es nach dem Mittelwertsatz eine Folfe $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|\delta_k| \leq |h_k|$ (und δ_k abhängig von x, y), sodass

$$\psi_k(x,y) := \frac{u(x + h_k e_i, y) - u(x,y)}{h_k} = \partial_{x_i} u(x + \delta_k e_i, y).$$

Nach den Voraussetzungen gibt es dann $g \in L^1(\Omega_2)$, sodass $\psi_k(x,y) \leq g(y)$ für alle $x \in \Omega_1$ und fast alle $y \in \Omega_2$ und es gilt $\psi_k(x,y) \to \partial_{x_i} u(x,y)$ für alle $x \in \Omega_1$ und fast alle $y \in \Omega_2$. Der Satz von Lebesgue liefert dann

$$\lim_{k\to\infty} \frac{v(x + h_k e_i) - v(x)}{h_k} = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_2} \psi_k(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega_2} \lim_{k\to\infty} \psi_k(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega_2} \partial_{x_i} u(x,y)\,\mathrm{d}y$$

für alle $x \in \Omega_1$. Die Stetigkeit von $\int_{\Omega_2} \partial_{x_i} u(x,y)\,\mathrm{d}y$ folgt aus Satz 2.2 angewandt an $\partial_{x_i} u$.

□