Übungsblatt 1

Abgabe: 20.4.2015; wird besprochen: 21.4.2015

Problem 1:

(a) Entscheide, ob die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2^3}{x_1^2 + x_2^4} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig in $x = 0$, Gâteaux-differenzierbar in $x = 0$ und Fréchet-differenzierbar in $x = 0$ ist.

(b) Bestimme die Fréchet-Ableitung von $f : C(G, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}, u \mapsto u^2(0)$, wobei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von 0 ist.

Problem 2: Es gibt einen Banachraum X und eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$, die in jedem $x \in X$ in jede Basisrichtung (Schauder-Basis) $e_k \in X$ richtungs-differenzierbar, jedoch in 0 nicht Gâteaux differenzierbar ist.

Anleitung: Betrachte
$X := l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} | \, x_i \in \mathbb{R} \quad \text{mit } \|x\|_1 := \sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty\}$, und zu $\Phi \in C_c^1(\mathbb{R})$ mit $\Phi'(0) \neq 0$ die Funktion $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(k^3 x_k) \cdot k^{-2}$.

Problem 3: Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) &= f(t, u(t)), \qquad && \forall t \in (0, T) \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Es sei $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und genüge einer Lipschitz-Bedingung bzgl. u,
d.h. $\exists L > 0$, so dass

$$\forall t \in [0, T], \forall u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^n : \quad |f(t, u) - f(t, \tilde{u})| \leq L|u - \tilde{u}|.$$

Zeige: Es gibt genau eine klassische Lösung $u(t) = (u_1(t), ..., u_n(t))$ des Anfangwertproblems, welche auf ganz [0,T] existiert.

Anleitung:

- Überlege: Für $\gamma > 0$ ist durch $\|u\|_\gamma := \max_{t\in[0,T]} \left\{\exp^{-\gamma t} |u(t)|\right\}$ eine Norm auf dem Raum $C([0, T])$ gegeben.
  Der Raum $X := (C([0, T]), \| \cdot \|_\gamma)$ ist ein Banachraum.
- Weise für $F : X \to X$ mit
  $$(Fu)(\cdot) := u_0 + \int_0^{\cdot} f(\tau, u(\tau)) \, d\tau$$
  die Kontraktionseigenschaft durch geeignete Wahl von γ nach.

Problem 4: Betrachte das Funktional (d.h. Operator mit Bild in $\mathbb{R}$)

$$F(u) := \int_a^b u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}dx$$

für $u \in X := \{v \in C^1([a,b]) : v(a) = v(b) = \alpha \in \mathbb{R}\}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimme die Euler-Lagrange-Gleichung für den Minimierer von F auf X.