Übungsblatt 2

Abgabe: 4.5.2015; wird besprochen: 5.5.2015

Problem 1: Betrachte das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= Au(t) + f(u(t)), \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

mit $u_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < \alpha < 0\}$, mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und mit $f(0) = 0, f'(0) = 0$.

Mit Hilfe des Satzes über die implizite Funktion zeige, dass es ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $u_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $|u_0| < \delta$ das AWP genau eine globale Lösung (d.h. für alle $t > 0$) hat.

Hinweis: Schreibe das AWP um als eine Integralgleichung. Verwende den Fakt, dass für alle $\mu > 0$ ein $C > 0$ existiert, sodass $\|e^{At}\| \leq Ce^{(\alpha+\mu)t}$ für $t \geq 0$. Wähle $\mu > 0$ so klein, dass $\alpha + \mu < 0$.

Problem 2: Zu gegebenen $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ und $f \in C([0,1])$ betrachten wir klassische Lösungen vom Randwertproblem

$$\text{(RWP)} \begin{cases} \partial_x^2 u(x) + a_1 \partial_x u(x) + a_0 u(x) &= f(x) \quad \text{auf } (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{cases}$$

(a) Es gilt folgendes Maximumprinzip für (RWP):

Für $a_0 \leq 0$ und $f(x) \geq 0$ ist jede Lösung $u \in C^2([0,1])$ von (RWP) nichtpositiv, $u(x) \leq 0$ für $x \in [0,1]$.

Nutze das Maximumprinzip um die Eindeutigkeit der klassischen Lösung von (RWP) für beliebiges $f \in C([0,1])$ unter der Bedingung $a_0 \leq 0$ nachzuweisen. Zur Info: die Existenz gilt.

(b) Zu $f \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f(0,0) = 0$ und $\partial_1 f(0,0) \leq 0$ betrachten wir das folgende nichtlineare Randwertproblem für u:

$$\text{(NLRWP)} \begin{cases} \partial_x^2 u(x) + f(u(x), \partial_x u(x)) &= g(x) \quad \text{auf } (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{cases}$$

mit $g \in C([0,1], \mathbb{R})$.

Man zeige: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass, zu jedem g mit $\|g\|_\infty < \varepsilon$ eine Lösung $u \in C^2([0,1])$ von (NLRWP) existiert.

Hinweis: Teil (a) wird hier benötigt.

Problem 3: Für das Problem

$$\begin{cases} \partial_x^2 u(x) + \mu u(x) + f(u(x)) &= 0 \quad \text{auf } (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{cases}$$

mit $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}), f(0) = 0$ finde alle $\mu \in \mathbb{R}$, in deren Umgebung die Lösung $u \equiv 0$ die einzige kleine Lösung (d.h. $\|u\|_{C^2(0,1)}$ klein) ist. Hier ist eine genauere Aussage möglich als nur mit Hilfe des Problems 2.

Problem 4: Es seien X, Y Banachräume und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ stetig invertierbar.

Zeige, dass,für $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \|A^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(Y,X)}$ auch $A + B$ invertierbar ist.

Hinweis: Zeige, dass für $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $\|T\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ auch $Id + T$ invertierbar ist (Neumannsche Reihe).

Bemerkung: Dies zeigt auch, dass die Menge der stetig invertierbaren Operatoren in $\mathcal{L}(X, Y)$ offen ist.