Übungsblatt 3

Abgabe: 18.5.2015; wird besprochen: 19.5.2015

Problem 1: Bestimme die Fréchet-Ableitung (in diesem Fall die Jakobi-Matrix) $D_x H(t,x)$ auf $(t,x) \in [0,1] \times B_1(0)$ (mit der offenen Einheitskugel $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$) für

$$H(t,x) = (1-t)x + tG(x),$$

wobei

$$G(x) = \tau(x)\tilde{P}(x) + (1-\tau(x))x,$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{P}(x) = (p_1(x), \ldots, p_n(x))^T$ mit Polynomen p_j und wobei $\tau \leq 0$ löst

$$0 = \Phi(\tau, x) := |\tau\tilde{P}(x) + (1-\tau)x|^2 - 1$$

unter der Voraussetzung, dass $|\tilde{P}(x) - x| > c > 0$ für alle $x \in \overline{B_1(0)}$.

Bemerkung: Problem 1 kommt aus dem Beweis vom Satz von Brouwer, cf. die Vorlesung.

Problem 2: Seien X, Y Banachräume, $G \subset X$ offen, $f \in C^1(G,Y)$ und die Fréchet-Ableitung $Df(x) : X \to Y$ ein Isomorphismus für alle $x \in G$. Zeige, dass dann $f(G)$ offen ist.

Hinweis: Satz über die lokale Inverse.

Problem 3: Sei S die Einheitssphäre in $L^2((0,1),\mathbb{R})$, d.h. $S = \{u \in L^2((0,1),\mathbb{R}) : \|u\|_{L^2(0,1))} = 1\}$, und sei $f : L^2((0,1),\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, u \mapsto f(u) = \int_0^1 u(x)dx$.

(a) Unter der Voraussetzung ihrer Existenz, bestimme alle Maxima und Minima von f auf S.

(b) Gibt es ein Minimum von f auf $S \cap \{u \geq 0\}$? Warum?

Problem 4: (Kompaktheitsbegriffe) Es sei X ein Banachraum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *präkompakt*, falls A zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung mit ε-Kugeln besitzt.

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *folgenkompakt*, falls jede Folge in A eine in A konvergente Teilfolge besitzt.

Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. A ist kompakt.

2. A ist folgenkompakt.

3. A ist präkompakt und abgeschlossen.

Folgere: $A \subset X$ präkompakt $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ kompakt.