Übungsblatt 5

Abgabe: 15.6.2015; wird besprochen: 16.6.2015

Problem 1: (Lyapunov-Schmidt-Reduktion) Betrachte wieder (cf. Blatt 2) das Randwertproblem (RWP)

$$\begin{cases} u''(x) + \mu u(x) + f(u(x)) & = 0 \quad \text{auf } (0,1), \\ u(0) = u(1) & = 0 \end{cases}$$

mit $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(0) = 0$. Wir untersuchen den Verzweigungspunkt $\mu = \mu_0 := \pi^2 - f'(0)$. Mit Hilfe der Lyapunov-Schmidt-Reduktion zeige, dass lokal zu $(u, \mu) = (0, \mu_0)$ (RWP) äquivalent ist zur reduzierten Gleichung

$$\Phi(\alpha, \mu) = 0,$$

wobei

$$\Phi : U \times V \to \mathbb{R}, (\alpha, \mu) \mapsto (\mu - \pi^2)\alpha + 2\int_0^1 f(\alpha \sin(\pi y) + v(\alpha, \mu)) \sin(\pi y) dy$$

mit Umgebungen $U, V \subset \mathbb{R}$ von 0 beziehungsweise μ_0 und mit einer eindeutig bestimmten Funktion $v : U \times V \to X_1 := \{u \in C^2((0,1)) | \, u(0) = u(1) = 0, \int_0^1 u(y) \sin(\pi y) dy = 0\}$, für die $v(0, \mu_0) = 0$.

Hinweis: Für $L : u \mapsto u'' + \mu_0 u + f'(0)u$ gilt (in geeigneten Funktionenräumen) $R(L) = Ker(Q)$, wobei Q eine stetige Projektion auf $span\{\sin(\pi x)\}$ ist. Beweise diese Aussage - hier wird die Variation der Konstanten nützlich. Sollte Dir der Beweis nicht gelingen, benutze die Aussage und bearbeite den Rest der Aufgabe.

Problem 2: (Ableitungsoperatoren) Für $k \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir die Banachräume $X_1 := \{u \in C^1([0,1], \mathbb{R}^n) \mid u(0) = 0\}$ und $X_2 := \{u \in C^2([0,1], \mathbb{R}^n) \mid u(0) = u(1) = 0\}$.

Man zeige:

(a) $A : X_1 \to C([0,1], \mathbb{R}^n)$ mit $(Au)(t) := \partial_t u(t)$ ist ein Isomorphismus.

(b) Für $A : C^1([0,1], \mathbb{R}^n) \to C([0,1], \mathbb{R}^n)$ mit $(Au)(t) := \partial_t u(t)$ gilt:
$dim\, ker(A) = n$ und $codim\, R(A) = 0$.

(c) Für $b, c \in \mathbb{R}$ betrachten wir den Operator $A : X_2 \to C([0,1], \mathbb{R}^n)$ definiert durch $(Au)(t) := \partial_t^2 u(t) + b\partial_t u(t) + cu(t)$.
Man zeige: Im Fall $n = 1$ und $c \leq 0$ gilt $dim\, ker(A) = codim R(A) = 0$.
Hinweis für (c): Maximumprinzip aus Blatt 2.

Problem 3: Sei $X := c_0$ der Raum der reellen Nullfolgen (versehen mit der l^∞-Norm) und sei $F : X \to X, (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \mapsto (x_j^2)_{j \in \mathbb{N}}$. Nullfolgen sind l^∞-Folgen $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, für die $x_j \to 0$ für $j \to \infty$. Zeige, dass $F \in C^1(X, X)$, dass die Fréchet-Ableitung $DF(x)$ ein kompakter Operator für jedes $x \in X$ ist und dass aber F nicht kompakt ist.