Blatt 11

wird besprochen: 2.7.2014

Problem 1:

(a) Betrachte das lineare Problem

$$dx/dt = Ax, \; A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit $\mathrm{Re}(\sigma(A)) < 0$. ($A$ muss nicht symmetrisch sein.) Definiere $V(x) := x^T P x$, wobei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische, positiv-definite Lösung der "Lyapunov-Gleichung"

$$A^T P + PA = -I$$

ist. Zeige, dass V eine Lyapunov-Funktion ist und dass $x(t) \equiv 0$ asymptotisch stabil ist.

(b) Zeige. dass eine mögliche Lösung der Lyapunov-Gleichung

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} e^{At} dt$$

ist. *Bemerkung: Eigentlich ist die Lösung eindeutig.*

Problem 2: Betrachte Gleichungen mit linearem Hauptteil

$$dx/dt = Ax + g(x), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathrm{Re}(\sigma(A)) < 0, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, |g(x)| = o(|x|) \text{ für } x \to 0.$$

Zeige, dass die Funktion V aus Problem 1 eine Lyapunov-Funktion ist auf einer Umgebung der Null. Folgere die asymptotische Stabilität von $x(t) \equiv 0$.

Bemerkung: In beiden Problemen sollte man ohne Stabilitätssätzen aus der Linearisierungstheorie arbeiten.