Blatt 12

wird besprochen: 9.7.2014

Problem 1: Zeige, dass $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)^T$ eine periodische Lösung von

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' &= x + y(1 - x^2 - y^2) \\ z' &= z \end{aligned}$$

ist. Schreibe das System in Zyllinderkoordinaten (r, θ, z) um und berechne den exakten Fluss $\phi_t(r, \theta, z)$. Für ein festes $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ betrachte die Halbebene

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \theta = \theta_0, r > 0, z \in \mathbb{R}\}$$

und bestimme die Poincaré-Abbildung $P(r, z)$ mit $P : \Sigma \to \Sigma$. Berechne $DP(r, z)$ und zeige, dass $DP(1, 0) = e^{2\pi B}$, wobei $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und die Eigenwerte von B sind -2 und 1. Ist γ orbital stabil?

Problem 2: Für die periodische Lösung $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)^T$ von

$$\begin{aligned} x' &= -y + xz^2 \\ y' &= x + yz^2 \\ z' &= -z(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

berechne die Linearisierung und das Fundamentalsystem $\Phi(t)$ des linearisierten Problems, wobei $\Phi(0) = I$ gelten soll. Bestimme die Floquet-Multiplikatoren und die Dimensionen der stabiler, instabiler und zentraler Mannigfaltigkeit von γ.

Problem 3: Zeige, dass periodische Lösungen von Hamiltonischen Systemen in $\mathbb{R}^{2n}$ nie asymptotisch orbital stabil sind.

Hinweis: Floquet-Multiplikatoren.

Problem 4: Betrachte für den Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ das System

$$\begin{aligned} x' &= -y + \mu x, \\ y' &= x + \mu y. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Zeige, dass der Fluss für $\mu = 0$ nicht topologisch äquivalent ist zum Fluss für $\mu \neq 0$.

Hinweis: Durch Widerspruch. Nutze das Limes $t \to \infty$ oder $t \to -\infty$.

Problem 5: Für die Gleichung

$$x' = -x(x^2 + \mu^2 - 3)(x^2 - 3x - \mu)$$

mit dem Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ bestimme das volle Verzweigungsdiagram, d.h. bestimme alle kritische Punkte und ihre Stabilität und benenne die Verzweigungen, die vorkommen.