Blatt 2

wird besprochen: 23.4.2014

Problem 1: (Freier Fall). Zwischen einem Versuchskörper der Masse m und einem anderen Körper (z.B. Planeten) der Masse M mit Abstand r (zwischen den Schwerpunkten) wirkt die Kraft $K = \gamma M m r^{-2}$, wobei γ die Gravitationskonstante ist. Daraus ergibt sich die Gleichung für die Beschleunigung d^2r/dt^2:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\gamma \frac{M}{r^2}.$$

Schreibe es als konservatives System in der Ebene um und wähle die potentielle Energie $V(r)$ so, dass $V(r) \leq 0$ für $r \geq R$ und $V(R) = 0$, wobei R der Durchmesser des Planeten ist (Kugelform des Planetenes angenommen). Zeichne das Phasendiagram für $r > 0$.

Berechne die Formel für die Fluchtgeschwindigkeit (minimale Geschwindigkeit mit der der Versuchskörper von der Oberfläche abgeschossen werden muss, so dass er nie zurück fällt) für diesen allgemeinen Fall.

Werte die Fluchtgeschwindigkeit aus für den Fall der Erde: $M = 5.97 * 10^{24} kg$, $R = 6.37 * 10^6 m$, $\gamma = 6.67383 * 10^{-11} m^3/(kg\ s^2)$

Problem 2:

(a) Beweise, dass falls zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kommutieren, $AB = BA$, dann gilt $e^{A+B} = e^A e^B$.

Hinweis: Nutze dabei den Fakt, dass der Produkt von zwei absolut-konvergenten Reihen eine absolut-konvergente Reihe ist, die durch den Cauchy-Produkt gegeben ist.

(b) Zeige, dass für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Inverse von e^A existiert und

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

Problem 3: Verwende Prob. 2 um zu beweisen, dass die Lösung $x(t) = e^{At}x_0$ von $dx/dt = Ax, x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ eindeutig ist.

Problem 4: Zeige, dass $\det(e^A) = e^{\text{trace}(A)}$.

Hinweis: Jordansche Normalform.

Problem 5: Berechne e^A für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.