Institut für Analysis — Tomáš Dohnal
Technische Universität Dortmund — tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de

Blatt 3

wird besprochen: 7.5.2014

Problem 1: Betrachte die skalare Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)x = q(t) \tag{0.1}$$

mit $p(t+\omega) = p(t) \in \mathbb{R}, q(t+\omega) = q(t) \in \mathbb{R}$ for all $t \in \mathbb{R}$ und mit einem $\omega > 0$. Seien ϕ_1, ϕ_2 die Lösungen des homogenen Problems ($q = 0$) mit $\phi_1(0) = \phi_2'(0) = 1$ und $\phi_2(0) = \phi_1'(0) = 0$.

(a) Zeige, dass falls $\phi_1(\omega) + \phi_2'(\omega) \in (-2, 2)$, dann ist die Nulllösung $x \equiv 0$ von (0.1) stabil.

(b) Wann ist die Nulllösung instabil und wann asymptotisch stabil?

Problem 2: Zeige, dass falls $\phi_1(\omega) + \phi_2'(\omega) = 2$, dann gibt es mindestens eine ω-periodische Lösung von (0.1) und falls $\phi_1(\omega) + \phi_2'(\omega) = -2$, dann gibt es mindestens eine 2ω-periodische Lösung von (0.1).

Problem 3: Beweise, dass neben den Eigenvektoren auch die Hauptvektoren von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und e^A übereinstimmen. Das heisst, A hat den Eigenwert λ mit Hauptvektoren $x_1, \ldots, x_k$ genau dann wenn e^A den Eigenwert e^λ mit den gleichen Hauptvektoren hat.

Problem 4: Berechne einen Logaritmus der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problem 5: Für das System

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= -2x_1, \\ dx_2/dt &= x_3, \\ dx_3/dt &= 0 \end{aligned} \tag{0.2}$$

finde das Fundamentalsystem $\Phi(t)$ mit $\Phi(0) = I$ und bestimme die stabile, instabile und zentrale Mannigfaltigkeiten für den kritischen Punkt $x = (0, 0, 0)^T$. Ist der kritische Punkt stabil oder instabil?