Tomáš Dohnal
tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de

Blatt 4

wird besprochen: 14.5.2014

Problem 1: Beweise folgende Aussagen.

(a) Falls $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ global Lipschitz-stetig ist mit einer gemeinsamen Konstante $L > 0$, d.h. $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$, dann hat das Problem

$$dx/dt = f(x), x(0) = x_0$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung auf ganzem $\mathbb{R}$.

(b) Falls $f : \mathbb{R}^n \times R \to \mathbb{R}^n$ stetig und linear beschränkt ist, d.h. es gibt Konstanten $c_1, c_2 > 0$, sodass $|f(x,t)| \leq c_1|x| + c_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$, dann hat das Problem

$$dx/dt = f(x,t), x(0) = x_0$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung auf ganzem $\mathbb{R}$.

Hinweis: Gronwall-Ungleichung und Eigenschaften des maximalen Existenzintervalls.

Problem 2: Bestimme die Lösung und das maximale Existenzintervall für

$$dx/dt = 1 + x^2, x(0) = x_0 \in \mathbb{R}.$$

Problem 3: Bespreche die Existenz und Eindeutigkeit für

$$dx/dt = 2x/t, x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}.$$

Mache eine Fall-Unterscheidung in $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

Problem 4: Bestimme den Fluss des Systems

$$dx/dt = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 2x_2 + x_1^2 \end{pmatrix}$$

und zeige, dass die Menge $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = -\frac{x_1^2}{4}\}$ invariant ist.

Problem 5: Für $dx/dt = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

bestimme die stabile, instabile und zentrale Unterräume und bespreche die Stabilität der Lösungen $x(t)$.

Problem 6: Betrachte das System $dx/dt = f(x), x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und nehme an, dass für alle $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ offen eine eindeutige Lösung $x \in C^1(\mathbb{R}, U)$ existiert (also auf ganzem $\mathbb{R}$ mit Werten in U).

Sei jetzt $p \in \omega(x_0)$. Zeige, dass dann alle Trajektorien, die durch p gehen, auch in $\omega(x_0)$ liegen.