Blatt 9

wird besprochen: 18.6.2014

Problem 1: Für das folgende System finde eine Lyapunov-Funktion.

$$\begin{aligned} dx/dt &= -x + y - y^2 - x^3, \\ dy/dt &= x - y + xy. \end{aligned}$$

Hinweis: Probiere eine möglichst kurze Potenzreihe, die mit quadratischen Termen anfängt.

Problem 2: Betrachte

$$dx/dt = f(x), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \tag{0.1}$$

und $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\nabla V(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $V(x) = 0$.

Angenommen $M := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq 0\}$ ist positiv invariant bezüglich (0.1), zeige, dass

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in \partial M.$$

Problem 3: Betrachte ein Gradientensystem $dx/dt = -\nabla g(x)$ mit $g \in C^2(E, \mathbb{R}), E \subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 \in E$ und $\nabla g(0) = 0$. Zeige, dass falls g einen Sattelpunkt in $x = 0$ hat, dann ist $x(t) \equiv 0$ instabil.

Problem 4:

(a) Zeige, dass die Linearisierung eines beliebigen Gradientensystems in einem kritischen Punkt nur reelle Eigenwerte hat.

(b) Zeige, dass die Linearisierung eines beliebigen zwei-dimensionalen Hamiltonschen Systems $dx/dt = \partial_y H(x, y), dy/dt = -\partial_x H(x, y)$ mit $x(t), y(t) \in \mathbb{R}$ folgende Eigenwerte hat: entweder $\lambda_{1,2} = \pm\mu$ oder $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\mu$ mit $\mu \in \mathbb{R}$.

Problem 5: Betrachte das Hamiltonsche System in $\mathbb{R}^{2n}, n \in \mathbb{N}$ gegeben durch die Hamiltonsche Funktion

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + U(q)$$

mit $U \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Sei $U(0) = 0$ ein lokales Maximum von U und

$$U(q) = -\sum_{j=1}^{n} a_j q_j^{2m} + h(q),$$

wobei $h(q) = O(|q|^{2m+1})$ und $|\nabla h(q)| = O(|q|^{2m})$ für $|q| \to 0$ mit einem $m \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n > 0$.

Zeige, dass $(q, p) = (0, 0)$ ein instabiler kritischer Punkt des Hamiltonschen Systems ist.