PDE 1 – WiSe 2016/17

I. Einleitung

I.1. PDE-Beispiele

a) Poisson-Gleichung $\quad -\Delta u(x) = f(x),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$

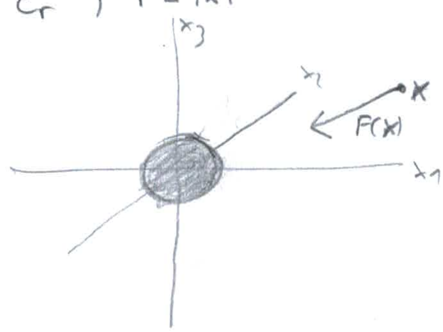
Eine Massen-Verteilung mit Dichte $\rho(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$ erzeugt ein Gravitationspotential $\phi(x)$, wobei

$$\Delta \phi(x) = 4\pi G \rho(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \qquad (1)$$

$\left(G = \text{Gravitationskonstante},\ G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \right)$

Herleitung von (1):

- Nach Newton-Gravitationsgesetz: Sphärisches Objekt mit Masse M generiert ein konservatives Kraftfeld $F(x) = -\frac{GM}{r^2} e_r$, $r = |x|$
  e_r = radialen Einheitsvektor



F ist konservativ (d.h. keine Arbeit für Bewegung entlang geschlossener Wege) $\Rightarrow F = -\nabla \phi$ für eine skalare Fkt $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

- Sei jetzt $\rho: \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ gegeben und wähle eine Kugel $B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$ (zentriert in 0)

$$M := \int_{B_r(0)} \rho(x)\, dx \qquad (\text{Masse in } B_r(0))$$

Fluss durch $\partial B_r(0)$:

$$\int_{\partial B_r(0)} F \cdot \underbrace{n}_{= e_r}\, dS(x) = -\int_{\partial B_r(0)} \frac{GM}{r^2} \underbrace{e_r \cdot e_r}_{=1}\, dS(x)$$

$$= -\frac{GM}{r^2} 4\pi r^2 = -4\pi GM$$

Also $\displaystyle\int_{\partial B_r(0)} \nabla \phi \cdot n\, dS(x) = 4\pi G \int_{B_r(0)} \rho(x)\, dx$

Satz von Gauß $\Rightarrow \displaystyle\int_{B_r(0)} \Delta \phi(x)\, dx = 4\pi G \int_{B_r(0)} \rho(x)\, dx \qquad (\nabla \cdot \nabla = \Delta)$

- gilt für jede Kugel B

$$\Rightarrow \quad \Delta \phi(x) = 4\pi G \rho(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3$$

b) Diffusionsgl. / Wärmeleitungsgl.

- Diffusion eines Stoffes mit Konzentration $u(x,t)$

Voraussetzung:
- Stofffluss j erfüllt $j(x,t) = a(x) \nabla u(x,t)$ mit $a(x)$ = Diffusionskonstante (≥ 0)
- Stoffzufuhr $f(x,t)$ bekannt

Massenerhaltung liefert: $$\partial_t u - \nabla \cdot (a \nabla u) = f \;, \quad x \in \mathbb{R}^3, t>0 \qquad (2)$$

(2) ist Beispiel einer parabolischen Gl.

Bem: Für zeitunabh. Lsgen (mit $f = f(x)$) erhalte aus (2)

$$-\nabla(a \nabla u) = f \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \qquad (3)$$

(3) ist Bsp. einer elliptischen Gl.

c) Wellengl.

$$\partial_t^2 u - \Delta u = f(x,t) \;, \quad x \in \mathbb{R}^n \;, n \in \{1,2,3\} \qquad (4)$$

- schwingende Saite $(n=1)$, Trommel $(n=2)$, akustische Wellen $(n=3)$

(4) ist hyperbolische Gl.

d) Schrödinger Gl. $$i\,\partial_t u + \Delta u = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \;, t>0 \qquad (5)$$

u = Wellenfkt eines Punktteilchens

e) Fisher - Gl. $$\partial_t u = \partial_x^2 u + u(1-u) \qquad (6)$$

- Reaktionsdiffusionsgl., Modell aus der Populationsdynamik

f) Maxwell-Glen

$$\nabla \times E = -\partial_t B \quad , \quad \nabla \cdot D = \rho \;, \quad \nabla \cdot B = 0$$
$$\nabla \times B = \partial_t D$$
$$D = E + 4\pi P$$

$E, B, D, P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

E = elektr. Feld, B = magn. Flussdichte, D = el. Flussdichte, ρ = Ladungsdichte

P = Polarisation $(P = P(E,x))$

f) Navier-Stokes-Glen (Fluid-Strömung)

$$\partial_t v_i + \sum_{j=1}^{3} v_j \partial_{x_j} v_i - \Delta_x v_i = -\partial_{x_i} p \quad , i = 1,2,3$$

$$\nabla \cdot v = 0$$

$v: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^3 \\ (x,t) \mapsto v(x,t) \end{cases}$ Geschwindigkeit

$p: \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ Druck

Allgemeine PDE-Form:

$$F(y, u(y), \nabla u(y), D^2 u(y), \dots) = 0 \qquad (7)$$

- $y \in U \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, z.B. $y = (t, x_1, \dots, x_n)$ mit $t \in (0,T)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$
- $u: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$
- F gegebene Fkt.

- PDEs werden oft durch Anfangsdaten (AB) $u(x,0) = u_0(x)$ und/oder Randdaten (RB) $u(x,t) = h(x,t)$, $x \in \partial\Omega$ oder z.B. $\partial_n u(x,t) = h(x,t)$, $x \in \partial\Omega$ oder ... ergänzt

- Glen (1) – (5) sind linear (F in (7) ist linear)
  (6) ist nichtlinear

- Diese Vorlesung (PDE 1): nur lineare PDEs
- PDE 2: nichtlin. PDEs

I.2 Klassische Lösung, Motivation für verallgemeinerten Lösungsbegriff

klassische Lsg = Lsg, für die alle Ableitungen in gegebenen PDE stetig sind und die AB / RB im stetigen Sinne angenommen werden

1) **Poisson-Gl.** (mit Dirichlet RB)

$$\left.\begin{array}{ll} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen} \\ u(x) = h(x), & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} (8)$$

mit $f \in C(\Omega)$, $h \in C(\partial\Omega)$.

Def: $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ heißt klassische Lsg von (8), falls $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und (8) gilt.

Bsp 1: $\Omega = (0,1)$, $h = 0$, $f \in C^1(0,1)$, $f(0) = f(1) = 0$.

Dann gilt die Fourier-Entwicklung $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \sin(k\pi x)$, $b_k = 2\int_0^1 f(x) \sin(k\pi x)\, dx$

wobei die Reihe glchm. auf $[0,1]$ konvergiert.

Lsg-kandidat: $u(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{b_k}{k^2\pi^2} \sin(k\pi x)$

Nachweis, daß u klass. Lsg ist muss das Vertauschen von Δ und $\sum_k$ rechtfertigen (geht dank der glchm. Konvergenz). ↓

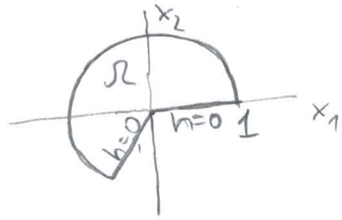
Bem: Für allgemeinere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ siehe das Perron-Verfahren.

Problem: klass. Lsg von (8) exist. nicht, falls z.B. f unstetig, weil dann $\Delta u = -f$ unstetig $\Rightarrow u \notin C^2(\Omega)$

2) **Laplace-Gl.** (mit Dirichlet RB) (Spezialfall von (8))

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = h & \text{auf } \partial\Omega \end{array}\right\} (9)$$

Bsp 2: (einspringende Ecke) Betrachte $\Omega = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) : |r| < 1,\ \varphi \in (0, \frac{\pi}{b})\}$ mit $b \in (\frac{1}{2}, 1)$



Sei $h \in C^1(\partial\Omega)$, $h(x)=0$ für $|x|<1$.

(9) in Polarkoordinaten:

$$(10)\begin{cases} (a) & r^2\partial_r^2 U + r\partial_r U + \partial_\varphi^2 U = 0, \quad r\in[0,1),\ \varphi\in(0,\frac{\pi}{b}) \\ (b) & U(1,\varphi) = H(\varphi), \quad \varphi\in[0,\frac{\pi}{b}] \\ (c) & U(r,0) = U(r,\frac{\pi}{b}) = 0, \quad r\in[0,1] \end{cases}$$

wobei
- $(x_1,x_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$
- $u(x) = U(r,\varphi)$
- $h(x) = \begin{cases} H(\varphi), & |x|=1,\ x\in\partial\Omega \\ 0, & |x|<1,\ x\in\partial\Omega \end{cases}$

Separation der Variablen: $U(r,\varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$

$$\Rightarrow \quad r^2 R''\Phi + rR'\Phi = -R\Phi''$$

$$\underbrace{r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R}}_{\text{nur } r\text{-abhängig}} = \underbrace{-\frac{\Phi''}{\Phi}}_{\text{nur } \varphi\text{-abh.}} = \lambda = \text{const.}$$

Also:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad \varphi\in(0,\tfrac{\pi}{b}) \\ (10c) \Rightarrow\ &\Phi(0) = \Phi(\tfrac{\pi}{b}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \qquad (12)$$

- (11) ist ein Eigenwert-Problem

  Eigenpaare: $(\lambda_n, \Phi_n(\varphi)) = (b^2n^2, \sin(nb\varphi))$, $n\in\mathbb{N}$

- (12): $r^2R'' + rR' - b^2n^2R = 0$

  $R(0) = 0$ (für Stetigkeit von U in $r=0$)

  Lsg mit $R(1)=1$: $R_n(r) = r^{bn}$, $n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow U(r,\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n r^{bn}\sin(nb\varphi)$ mit $a_n\in\mathbb{R}$ zu bestimmen aus (10b)

Für (10b) entwickle H in der Four.-Reihe ($H\in C^1((0,\frac{\pi}{b}))$, $H(0)=H(\frac{\pi}{b})=0$)

$$H(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n\sin(nb\varphi), \quad h_n = \frac{2b}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{b}} H(\varphi)\sin(kb\varphi)\,d\varphi$$

(10b) $\Rightarrow a_n = h_n$, $n\in\mathbb{N}$, $\underline{U(r,\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n r^{bn}\sin(nb\varphi)}$

Angenommen $b_1 \neq 0$, dann $\partial_r \left(b_1 r^b \sin(b\varphi)\right) = b_1 r^{b-1} \sin(b\varphi)$

$\to \infty$ für $r \to 0$

Also $\partial_r U(r,\varphi) \to \infty$ für $r \to 0$ (Singularität)

- u zwar eine klass. Lsg aber nicht z.B. gleichm. C^1 auf Ω
  Grund: irregulärer Rand

Bsp 3: $\Delta u = 0$ in $\Omega := B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$

$u = h$ auf $\partial\Omega$, $h(x) = \begin{cases} 0, & x \in \partial\Omega \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Fakt: Für $n \geq 2$ gibt es keine klass. Lsg! (ohne Beweis)
Grund: irregul. Rand

3) Erhaltungsgleichungen

Bsp 4: Burgers-Gl.
$$\left.\begin{aligned} &\partial_t u + u\,\partial_x u = 0, && (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ &u(x,0) = u_0(x), && x \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} (13)$$

Lösung (mit Hilfe der Methode der Charakteristiken):
$u(x,t) = u_0(y)$, wobei y die Lsg von $x = y + u_0(y)t$ ist.

Kontrolle:
$$\left.\begin{aligned} \partial_t u &= u_0' \cdot \partial_t y \\ \partial_t y &= -u_0(y) - t\,u_0'(y)\,\partial_t y \\ \partial_t y &= \frac{-u_0(y)}{1+t\,u_0'(y)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \partial_t u = -\frac{u_0' u_0}{1+t u_0'}$$

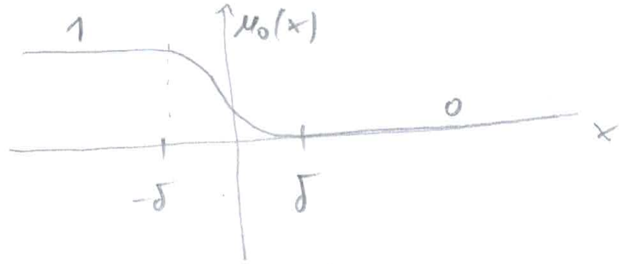
solange $1+t\,u_0'(y) > 0$ $\forall\, y \in \mathbb{R}$

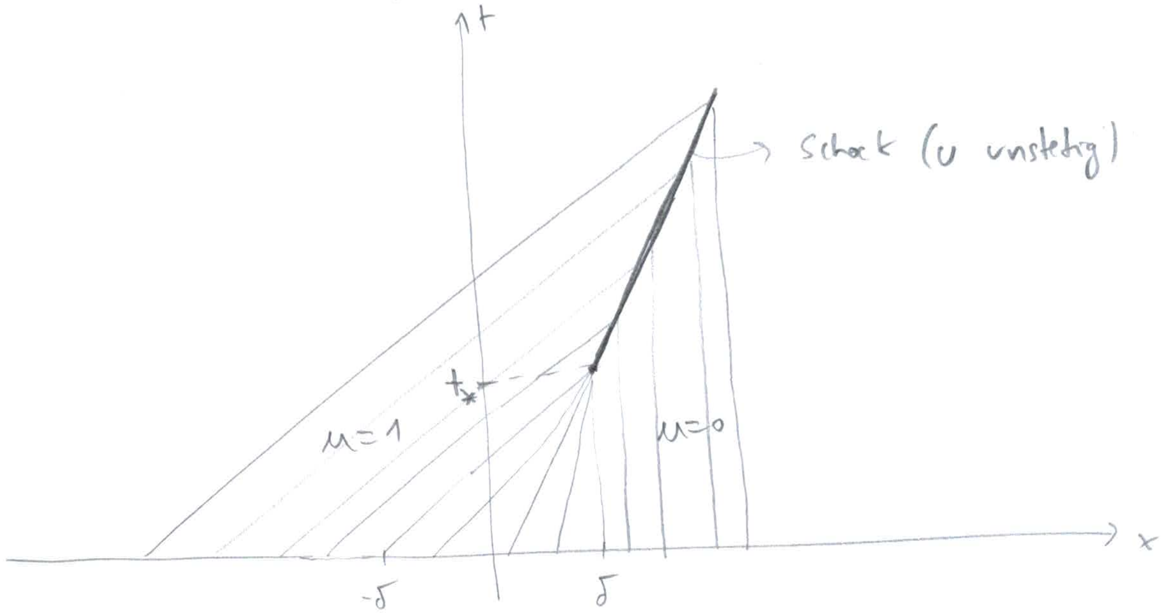
$$\left.\begin{aligned} \partial_x u &= u_0' \cdot \partial_x y \\ \partial_x y &= 1 - t\,u_0'\,\partial_x y \\ \partial_x y &= \frac{1}{1+t\,u_0'(y)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \partial_x u = \frac{u_0'}{1+t\,u_0'}$$

$\Rightarrow \partial_t u + u\,\partial_x u = 0$ für t so klein, dass $1+t\,u_0'(y) > 0$ $\forall y$

Also u konstant entlang der Linien (Charakteristiken) $x = y + u_0(y)t$

z.B.





Schock $\Rightarrow$ keine klass. Lsg für $t > t_*$

Grund: Nichtlinearität in (B)

4) Transportgl. $\quad \partial_t u + c\,\partial_x u = 0 \quad , (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \quad , c \in \mathbb{R}$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad , x \in \mathbb{R}$$

Falls $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, dann $u(x,t) = u_0(x-ct)$ ist die klass. Lsg.

Falls $u_0 \notin C^1(\mathbb{R})$, was ist die Lsg?

$\hookrightarrow$ keine klass. Lsg

Grund: irreguläre Anfangsdaten

Zusammenfassung: Klass. Lsgen sind i.A. nicht zu erwarten

wegen
- unglatten Koeffizienten
- unglatten Gebieten
- unglatten Anfangsdaten
- Nichtlinearität

Ausweg: Definition eines verallgemeinerten Lsg-Begriffs („schwache Lsg") in einem größeren Funktionenraum (üblicherweise Sobolevraum)

- danach kann die Regularität schwacher Lsgen untersucht werden, ggf. ist die schwache Lsg sogar klassisch.

Ein Beispiel vorab:

$$\left.\begin{array}{llr} -\nabla\cdot(a(x)\nabla u) = f(x), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen} & (a) \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega & (b) \end{array}\right\} \quad (14)$$

mit $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$, $f \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$

Motivation zur Def. der schwachen Lsg: Sei zuerst u ein klass. Lsg. Multipliziere (14a) mit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ und integriere:

$$-\int_\Omega \varphi(x)\,\nabla\cdot(a(x)\nabla u(x))\,dx = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

nach der partiellen Int.:

$$\int_\Omega \nabla\varphi\cdot(a\nabla u)\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx. \qquad (15)$$

(15) macht Sinn ohne $u \in C^2$, sogar ohne $u \in C^1$. Es reicht $\nabla u \in L^2(\Omega)$.

- Passender Raum für u: Sobolevraum $H_0^1(\Omega)$ (kommt später)
- u heißt „schwache Lsg" von (14), falls (15) für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ gilt.

20.10.16

II. Distributionen und Sobolevräume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

II.1. Distributionen

Def: Der Raum der Testfunktionen ist $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$ (C^∞-Fkt mit kompaktem Träger) versehen mit folgendem Konvergenzbegriff

$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi$ bedeutet (i) $D^\alpha \varphi_j \to D^\alpha \varphi$ glchm. auf Ω $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$

(ii) $\exists K \subset \Omega$ kompakt: $\varphi_j = 0$ auf $\Omega \setminus K$ $\forall j \in \mathbb{N}$

Bem: Multiindex-Notation

Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, d.h. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$ ist 1) $D^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f$

2) $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

Def: Eine Distribution auf Ω ist eine lineare stetige Abb. $T: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

d.h. es gilt ($\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi \Rightarrow T(\varphi_j) \to T(\varphi)$ und T linear)

$\mathcal{D}'(\Omega) :=$ Menge aller Distrib. auf Ω

Bsp 1: ($L^1_{loc}(\Omega)$-Funktionen definieren Distributionen)

Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. $T_f : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto T_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \end{array} \right\}$ ist eine Distribution.

Bew: (i) T_f linear ✓

(ii) z.z. $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi \Rightarrow \int_\Omega f \varphi_j \, dx \to \int_\Omega f\varphi$

Es gilt • $\varphi_j f \to \varphi f$ f.ü. in Ω

• $|\varphi_j f| \le 2 \sup_{x \in \Omega} (|\varphi(x)|) |\chi_K f| =: F$ für alle j groß genug da $\varphi_j \to \varphi$ glchm,

wobei $K \subset \Omega$ kplt mit $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$ $\forall j$

$F \in L^1(\Omega) \xRightarrow[\text{majoris. Konvergenz}]{\text{Lebesgue}} \int_\Omega f\varphi_j \to \int_\Omega f\varphi$ ▤

andere Schreibweise für T_f:

$\langle f \rangle := T_f$, $\langle f \rangle(\varphi) := T_f(\varphi)$ (cf. z.B. Buch von B. Schweizer)

Bsp 2 (Dirac-Distribution δ_{x_0}, $x_0 \in \Omega$)

$$\delta_{x_0} : \begin{cases} \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \longmapsto \delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) \end{cases}$$

offenbar $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Bem: δ_{x_0} kann nicht als Integral mit einer $L^1_{loc}(\Omega)$ - Fkt dargestellt werden. (cf. Übungsblatt 1)

Def (distributionelle Ableitung)
Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ (Multiindex). Die α-Ableitung von T ist $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Bsp 1) Für $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ist

$$(D^\alpha T_f)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)\, D^\alpha \varphi(x)\, dx$$

Falls $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, dann nach P.I.

$$(D^\alpha T_f)(\varphi) = \int_\Omega D^\alpha f(x) \varphi(x)\, dx = T_{D^\alpha f}(\varphi)$$

d.h. für diffbare Fkten stimmt die Def. mit der klassischen Ableitung überein.

2) Heaviside-Fkt $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$H(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

Beh: $\partial_x H = \delta_0$ (genauer $D T_H = \delta_0$)

Bew: $D T_H(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\, \partial_x \varphi(x)\, dx = -\int_0^\infty \partial_x \varphi(x)\, dx = \varphi(0) = \delta_0(\varphi)$ ∎

3) Dirac-Delta
Sei $j \in \{1, \dots, n\}$, $x_0 \in \Omega$.

$\partial_{x_j} \delta_{x_0}(\varphi) = -\delta_{x_0}(\partial_{x_j} \varphi) = -\partial_{x_j} \varphi(0)$, d.h. $\underline{\partial_{x_j} \delta_{x_0} : \varphi \to -\partial_{x_j} \varphi(0)}$.

Bsp (distributionelle Lsg der Transportgl. mit unstetigen AB)

$$\left.\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R} \ , t \in (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Sei $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. (d.h. u_0 i.A. nicht C^1)

Suche ein $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ s.d. $\partial_t u + \partial_x u = 0$.

Beh.: $u(x,t) = u_0(x-t)$ ist die distrib. Lsg

Bew: $\Omega := \mathbb{R} \times (0,\infty)$

$$(\partial_t T_u)(\varphi) + (\partial_x T_u)(\varphi) = -\int_\Omega u\,(\partial_t \varphi + \partial_x \varphi)\,dx\,dt$$

$$= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u_0(x-t)\,(\partial_t \varphi + \partial_x \varphi)(x,t)\,dx\,dt$$

$$= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u_0(s)\,(\partial_t \varphi + \partial_x \varphi)(s+t,t)\,ds\,dt$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} u_0(s) \underbrace{\int_0^\infty \partial_t \left(\varphi(s+t,t)\right) dt}_{=0}\,ds = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

∎

Bem:
- Eine distributionelle Lsg einer PDE ist $u \in \mathcal{D}'$ sodass die PDE in distributionellen Sinne gilt.
- Falls alle Koeffizienten L^1_{loc}-Funktionen sind, sucht man als Lsg T_u mit $u \in L^1_{loc}$, d.h. man „testet die PDE mit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$" (multipliziere mit φ, integriere über Ω und verschiebe alle Ableitungen an φ).

Bsp. 1) Transportgl.

$\partial_t u + \partial_x u = 0$ in $\Omega = \mathbb{R} \times (0,\infty)$ im distrib. Sinne

$$\Longleftrightarrow$$

$$u \in L^1_{loc}(\Omega), \quad \int_\Omega u\,(\partial_t \varphi + \partial_x \varphi)\,dx\,dt = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

2) Poisson-Gl.

$-\Delta u = f$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ im distrib. Sinne

$$\Longleftrightarrow$$

$$u \in L^1_{loc}(\Omega), \quad -\int_\Omega u\,\Delta \varphi\,dx = \int_\Omega f \varphi\,dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

3) $\partial_x u = \partial_x \delta_0 + 1$, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $(*)$

$\partial_x \delta_0 \notin L^1_{loc}$ $\Rightarrow$ testen geht nicht

$$(*) \Leftrightarrow -u(\partial_x \varphi) = (\partial_x \delta_0)(\varphi) + T_1(\varphi) \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$
$$= -\delta_0(\partial_x \varphi) + T_{\partial_x(x+c)}(\varphi), \quad c \in \mathbb{R}$$
$$= (-\delta_0 - T_{x+c})(\partial_x \varphi)$$

$\Rightarrow u = \delta_0 + Id + c$

Def (Konvergenz von Distributionen)
Sei $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset D'(\Omega)$. $u_j \xrightarrow{D'(\Omega)} u$ heißt $u_j(\varphi) \to u(\varphi)$ $\forall \varphi \in D(\Omega)$

Bsp. (Dirac-Folge)
Sei $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1$ und $\psi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$.

Es gilt $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x)\,dx = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \varepsilon^n \,dy = 1$.

Beh: $T_{\psi_\varepsilon(\cdot - x_0)} \xrightarrow{D'(\Omega)} \delta_{x_0}$ für $\varepsilon \to 0$.

Bew: Sei $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ kompakt.

$$T_{\psi_\varepsilon(\cdot - x_0)}(\varphi) = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right) \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \varphi(\varepsilon y + x_0)\,dy$$

- $\psi(y)\varphi(\varepsilon y + x_0) \to \psi(y)\varphi(x_0)$ für fast alle $y \in \mathbb{R}^n$
- $|\psi(\cdot)\varphi(\varepsilon \cdot + x_0)| \leq |\psi(\cdot)| \sup_{\varepsilon^{-1}(K - x_0)} |\varphi| \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$\Big\}$ Lebesgue $\Rightarrow$ major. konv.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \varphi(\varepsilon y + x_0)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon \to 0} (\psi(y)\varphi(\varepsilon y + x_0))\,dy = \varphi(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\,dy = \varphi(x_0)$$

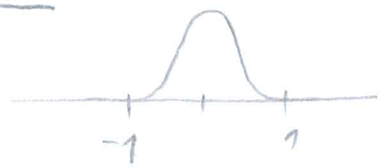
$\Rightarrow T_{\psi_\varepsilon(\cdot - x_0)}(\varphi) \to \delta_{x_0}(\varphi)$ $\blacksquare$

Def: (Dirac-Folge)
Eine ε-Familie $\psi_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt Dirac-Folge, falls $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon = 1$ und
$$T_{\psi_\varepsilon} \xrightarrow{D'(\mathbb{R}^n)} \delta_0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

24.10.

Spezielle (glatte) Dirac-Folgen : mollifiers

Sei $\rho(t) := \begin{cases} c_n e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & t \in [-1,1] \\ 0, & \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases}$



mit c_n s.d. $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(|x|)\, dx = 1$.

Bem: $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

Sei $\rho_\varepsilon : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \rho\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \varepsilon^{-n}, \quad \varepsilon > 0 \end{cases}$ (1)

ρ_ε heißt ein Glättungskern (mollifier).

Lemma 1: Für jede Folge $(\varepsilon_j)_j \subset \mathbb{R}$ mit $\varepsilon_j \to 0$ ist ρ_{ε_j} eine Dirac-Folge.

Bew: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

oder cf. Bsp. (Dirac-Folge) oben

$$\left|\varphi(0) - \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)\varphi(y)\,dy\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)(\varphi(y)-\varphi(0))\,dy\right| \le \int_{B_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(y)\,|\varphi(y)-\varphi(0)|\,dy$$

$$\le \underbrace{\sup_{y\in B_\varepsilon(0)} |\varphi(y)-\varphi(0)|}_{\to 0\ (\varepsilon\to 0)} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)\,dy}_{=1} \qquad \blacksquare$$

Korollar 2: $(\rho_\varepsilon * \varphi)(x) \to \varphi(x) \quad (\varepsilon \to 0) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\ x \in \mathbb{R}^n$

(Faltung: $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy$)

Lemma 3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} u \subset \Omega$.

(a) $\rho_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

(b) Falls $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$, $\varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, \partial\Omega)$, dann $\rho_\varepsilon * u \in C_c^\infty(\Omega)$.

(c) $u \in C(\Omega) \Rightarrow \rho_\varepsilon * u \to u \quad (\varepsilon\to 0)$ gleichm. auf kompakten Teilmengen von Ω

(d) $p \in [1,\infty)$, $u \in L^p(\Omega) \Rightarrow \|\rho_\varepsilon * u - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ (Approx. von L^p-Fkt)

Bem: $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ heißt $\overline{\Omega}_1$ kplt & $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$

Bew: (a), (b) Übung

(c) Sei $K \subset \Omega$ kpkt, $x \in K$, $\eta > 0$.

Ähnlich zu L. 1, für $\varepsilon < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$

$$|u(x) - (\rho_\varepsilon * u)(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y)\,(u(x)-u(y))\,dy\right|$$

$$\leq \int_{B_\varepsilon(x)} \rho_\varepsilon(x-y)\, |u(x) - u(y)|\, dy$$

$$\leq \max_{\substack{x' \in K,\, y \in \Omega \\ |x'-y| \leq \varepsilon}} |u(x') - u(y)| \underbrace{\int_{B_\varepsilon(x)} \rho_\varepsilon(x-y)\, dy}_{=1}$$

$\leq \eta$ für ε klein genug mit $\varepsilon \neq \varepsilon(x)$

(d) $$|(\rho_\varepsilon * u)(x)|^p \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y)\, |u(y)|\, dy \right)^p$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y)\, |u(y)|^p dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y)\, dy \right)^{\frac{p}{p'}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$$\left(\rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon^{\frac{1}{p}} \cdot \rho_\varepsilon^{\frac{1}{p'}} \right)$$

$$\Rightarrow \|\rho_\varepsilon * u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y)\, |u(y)|^p\, dy\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)\, dx \right)}_{\leq 1} |u(y)|^p dy \leq \|u\|^p_{L^p(\Omega)} \qquad (*)$$

$C_c(\Omega)$ ist dicht in $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$ $\Rightarrow \exists\, w \in C_c(\Omega) : \|u - w\|_{L^p(\Omega)} < \eta$

$$\Rightarrow \|u - \rho_\varepsilon * u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u - w\|_{L^p(\Omega)} + \|w - \underbrace{\rho_\varepsilon * w}_{\substack{\in C_c(\Omega) \\ \text{für } \varepsilon \text{ klein genug}}}\|_{L^p(\Omega)} + \underbrace{\|\rho_\varepsilon * (w - u)\|_{L^p(\Omega)}}_{\overset{(*)}{\leq} \|w - u\|_{L^p(\Omega)}}$$

$$\leq 2\eta + \|w - \rho_\varepsilon * w\|_{L^p(\tilde{K})} \overset{(c)}{\leq} 3\eta \quad \text{falls } \varepsilon \text{ klein genug}$$

wobei $\tilde{K} \subset\subset \Omega$ mit $\operatorname{supp}(w), \operatorname{supp}(\rho_\varepsilon * w) \subset \tilde{K}$

∎

<u>Korollar 4</u>: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $C_c^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$.

<u>Bew</u>: Sei $u \in L^p(\Omega)$, $\eta > 0$. $C_c(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega) \Rightarrow \exists\, w \in C_c(\Omega)$: $\|w - u\|_{L^p(\Omega)} < \eta$.

$$\|u - \underbrace{\rho_\varepsilon * w}_{\substack{\in C_c^\infty(\Omega) \text{ (cf L.3 b)} \\ \text{für } \varepsilon \text{ klein}}}\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u - w\|_{L^p(\Omega)} + \underbrace{\|w - \rho_\varepsilon * w\|_{L^p(\Omega)}}_{\xrightarrow{(L.3c)} 0} < 2\eta \quad \text{für } \varepsilon \text{ klein.}$$

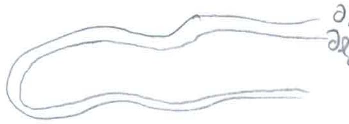
∎

Satz 5 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $\int_\Omega u \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Dann $u = 0$ f.ü. in Ω.

Bew: $u_\varepsilon := \rho_\varepsilon * u = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(\cdot - y) u(y) \, dy \qquad (u(x) := 0, \ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$



- Sei $x \in \Omega_\delta := \{ x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \delta \}$.

  Für $\varepsilon < \delta$ ist $\rho_\varepsilon(x - \cdot) \in C_c^\infty(\Omega) \overset{\text{Voraus.}}{\Longrightarrow} u_\varepsilon(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega_\delta$
- nach L.3 (d): $\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$

  $\Rightarrow \|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega_\delta)} = \|u\|_{L^p(\Omega_\delta)} = 0$, d.h. $u = 0$ f.ü. in Ω_δ
- $\delta > 0$ beliebig $\Rightarrow u = 0$ f.ü. in Ω

∎

II. 2. Sobolevraum $W^{k,p}(\Omega)$

II.2.1. Definition

Bem: Multiindex-Notation

$\left(\begin{array}{l} \text{Für } \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \text{ d.h. } \alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \text{ mit } \alpha_j \in \mathbb{N}_0 \ \forall j \text{ ist} \\ D^\alpha f := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f \quad \text{und } |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n. \end{array} \right)$ steht schon oben

Def 1: Der Sobolevraum $W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$ ist

$$W^{k,p}(\Omega) := \{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |\alpha| \le k \}$$

mit der Norm
$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, & p \in [1, \infty) \\ \sum_{|\alpha| \le k} \operatorname{ess\,sup}_\Omega |D^\alpha u|, & p = \infty. \end{cases}$$

d.h. $W^{k,p}$ sind die L^p-Fkt, für die die distrib. Ableitungen bis zur Ordnung k als L^p-Fkten dargestellt werden können.

Bem: $u \in L^p(\Omega) \Rightarrow u \in L^1_{loc}(\Omega)$, also $u \in L^p$ definiert eine Distribution

Definition von $W^{k,p}$ ohne Distributionen (wie z. B. in Evans)

Def 2 (schwache Ableitung)
Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt die schwache α-Ableitung von u, falls
$$\int_\Omega u \, D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

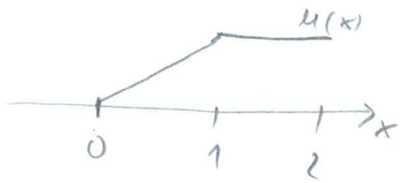
Schreibweise: $v = D^\alpha u$ (d.h. gleich für klassische, schwache und distrib. Ableitung)

Bem: 1) Falls die schwache Ableitung von $L^1_{loc}(\Omega)$ existiert, dann ist sie gleich den distrib. Abl..
2) Da $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, die Ableitung $D^\alpha u$ in Def 1 ist schwach.

Motivation für Def 2: Für ein $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ ist mit den klass. Ableitung $D^\alpha u$ wegen partiellen Integr.: $\int_\Omega u \, D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u \, \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

Def 3: $W^{k,p}(\Omega) := \{ u \in L^1_{loc}(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \leq k \}$
(identisch zu Def 1)

Bsp: 1) $n = 1$, $\Omega = (0,2)$, $u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



Beh: $Du(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1] \\ 0, & x \in (1,2] \end{cases}$

Bew: $\int_0^2 u \varphi' dx = \int_0^1 x \varphi' dx + \int_1^2 \varphi' dx = -\int_0^1 \varphi dx + \varphi(1) - \varphi(1)$
$= -\int_0^2 v \varphi dx$ ✓

2) $n = 1$, $\Omega = (0,2)$, $u(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$

– hat keine schwache Abl., da die distrib. Abl. $Du = \delta_1$ ist und $\delta_1 \notin L^1_{loc}$ (cf. Blatt 1)

27.10.16

Satz 6 Die schwache Ableitung ist eindeutig (in L^1-Sinne).

Bew: Seien v, w beide schwache α-Ableitungen von $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

$$\int_\Omega u\, D^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega w \varphi\, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (v-w)\varphi\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

$$\overset{S.5}{\Rightarrow} \quad v = w \text{ f.ü. in } \Omega$$

Satz 7 (Eigenschaften der schwachen Abl.)

Seien $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$, $|\alpha| \le k$. Dann

(i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$, $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u \quad \forall \alpha, \beta$ mit $|\alpha| + |\beta| \le k$

(ii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$, $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$,

(iii) $V \subset \Omega$, V offen $\Rightarrow u \in W^{k,p}(V)$

(iv) Falls $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$, dann $\zeta u \in W^{k,p}(\Omega)$ und

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta\, D^{\alpha-\beta} u \qquad \text{(Leibniz-Regel)}$$

$\beta \le \alpha \Leftrightarrow \beta_j \le \alpha_j \ \forall j$

Bew: Evans, § 5.2.3

$\binom{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$, $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$

Satz 8 $W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$ ist ein Banachraum.

Bew: 1) z.z. $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ ist eine Norm

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = |\lambda|\, \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0 \iff u = 0 \text{ f.ü. in } \Omega$$

Dreieck-Ungleichung: a) $p = \infty$ – offensichtlich

b) $p \in [1, \infty)$:

$$\|u + v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{1/p}$$

$$\le \Big(\sum_{|\alpha| \le k} \big(\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)} \big)^p \Big)^{1/p} \quad (\triangle \text{ für } \|\cdot\|_p)$$

$$\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} + \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \qquad \left(\begin{matrix}\Delta \text{ für} \\ \|.\|_{\ell^p}\end{matrix}\right)$$

$$= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

Bem.: Δ-Ungl. für L^p und ℓ^p heißt Minkowski-Ungl.

2) z.z.: Vollständigkeit

Sei $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset W^{k,p}(\Omega)$ eine Cauchy-Folge.

$\Rightarrow \forall |\alpha|\leq k$ ist $(D^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Cauchy in $L^p(\Omega)$.

$L^p(\Omega)$ vollständig $\Rightarrow \exists\, u^{(\alpha)} \in L^p(\Omega): D^\alpha u_j \xrightarrow{L^p(\Omega)} u^{(\alpha)}$

Sei $u := u^{(0)}$

z.z. $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $D^\alpha u = u^{(\alpha)} \quad \forall |\alpha|\leq k$.

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \int_\Omega u\, D^\alpha\varphi\, dx \overset{\text{(Lebesgue)}}{=} \lim_{j\to\infty} \int_\Omega u_j\, D^\alpha \varphi\, dx$$

$$= \lim_{j\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_j\, \varphi\, dx \quad , \text{da } u_j \in W^{k,p}(\Omega)$$

$$\overset{\text{(Lebesgue)}}{=} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u^{(\alpha)} \varphi\, dx$$

d.h. $D^\alpha u = u^{(\alpha)}$ und $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

Also $D^\alpha u_j \xrightarrow{L^p(\Omega)} D^\alpha u \quad \forall |\alpha|\leq k$, d.h. $u_j \xrightarrow{W^{k,p}} u \in W^{k,p}$. ∎

II.2.2. Approximation durch glatte Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Omega_\varepsilon := \{x\in\Omega : \text{dist}(x,\partial\Omega) > \varepsilon\}$

<u>Satz 9</u> (lokale Approximation)

Sei $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty)$, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $u_\varepsilon := \rho_\varepsilon * u$ in Ω_ε, $\varepsilon>0$, wobei ρ_ε der „mollifier" in (1) ist. Dann

(i) $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$

(ii) $u_\varepsilon \xrightarrow{W^{k,p}_{loc}(\Omega)} u \quad (\varepsilon\to 0) \qquad$ (d.h. $\|u_\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(V)} \to 0 \quad \forall V \subset\subset \Omega$)

<u>Bew:</u> (i) siehe L. 3 (a)

(ii) 1) Es gilt $D^\alpha u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * D^\alpha u$ in Ω_ε $\forall |\alpha| \le k$

<u>Bew:</u> $$D^\alpha u_\varepsilon(x) = D^\alpha \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y) u(y)\, dy \overset{\text{Lebesg.}}{=} \int_\Omega D_x^\alpha \rho_\varepsilon(x-y) u(y)\, dy$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D_y^\alpha \rho_\varepsilon(x-y) u(y)\, dy$$

• $D_y^\alpha \rho_\varepsilon(x-\cdot) \in C_c^\infty(\Omega)$, falls $x \in \Omega_\varepsilon$ (hier wichtig, dass $\Omega_\varepsilon \subset\subset \Omega$)

$$\underset{\text{von } D^\alpha u}{\overset{\text{Df.}}{\Longrightarrow}} \int_\Omega D_y^\alpha \rho_\varepsilon(x-y) u(y)\, dy = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y) D^\alpha u(y)\, dy$$

Also $$D^\alpha u_\varepsilon(x) = \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y) D^\alpha u(y)\, dy = (\rho_\varepsilon * D^\alpha u)(x) \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon.$$

2) Sei $V \subset\subset \Omega$ offen.

$$\|u_\varepsilon - u\|^p_{W^{k,p}(V)} = \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|^p_{L^p(V)}$$

$$\underset{(V \subset\subset \Omega)}{\overset{1)}{=}} \sum_{|\alpha| \le k} \|\rho_\varepsilon * D^\alpha u - D^\alpha u\|^p_{L^p(V)} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

wegen L. 3 (d) ∎

<u>Satz 10</u> (globale Approximation)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ mit $p \in [1, \infty)$.

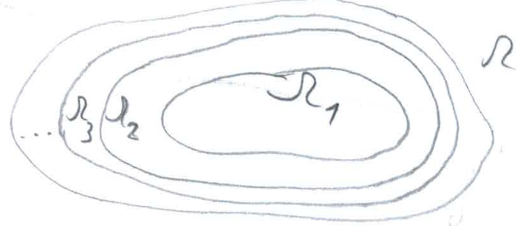
Es gibt $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$: $\|u_j - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0$ $(j \to \infty)$.

d.h. $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ liegt dicht in $W^{k,p}(\Omega)$

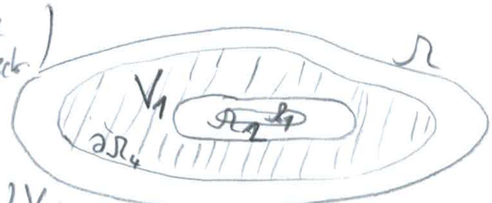
<u>Bem:</u> i. A. ist $C_c^\infty(\Omega)$ <u>nicht</u> dicht in $W^{k,p}(\Omega)$ (sondern in $W_0^{k,p}(\Omega)$)

<u>Bew:</u> 1) Sei $\Omega_i := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\}$ und $V_i := \Omega_{i+3} \setminus \overline{\Omega_{i+1}}$

$$\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i$$



Wähle $V_0 \subset\subset \Omega$: $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ (offene Überdeckung)



Sei $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ eine Zerlegung der Eins bezüglich $\bigcup_i V_i$,

d.h. $\quad 0 \leq \xi_i \leq 1, \quad \xi_i \in C_c^\infty(V_i), \quad \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \xi_i = 1$ in Ω.

(Existenz von (ξ_i) : [Alt, FA, 2.19])

2) Sei $\delta > 0$ und $u_i := \rho_\varepsilon * (\xi_i u)$

Es gilt : $\operatorname{supp}(\xi_i u) \subset V_i$

Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\quad \operatorname{supp}(u_i) \subset \Omega_{i+4} \setminus \overline{\Omega_i} =: W_i$

Offenbar $V_i \subset W_i$, $W_i \subset\subset \Omega$

$$\| \xi_i u - u_i \|_{W^{k,p}(\Omega)} = \| \xi_i u - u_i \|_{W^{k,p}(W_i)} \overset{S.9}{<} \frac{\delta}{2^{i+1}} \text{ für } \varepsilon \text{ klein genug}$$

Sei $v := \sum_{i \in \mathbb{N}_0} u_i$. $\quad v \in C^\infty(\Omega)$, da in jedem $V \subset\subset \Omega$ nur endlich viele u_i nicht verschwinden ($\Rightarrow$ kein Konvergenz-Problem)

Also für jedes $V \subset\subset \Omega$:

$$\| u - v \|_{W^{k,p}(V)} \leq \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \| u_i - \xi_i u \|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \delta \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{2^{i+1}} = \delta$$

Mit sup über $V \subset\subset \Omega$ ist $\| u - v \|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \delta$. $\blacksquare$

$u \in W^{k,p}(\Omega)$, $u - v \in W^{k,p}(\Omega) \Rightarrow v \in W^{k,p}(\Omega)$

<u>Satz 11</u>. Falls $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $\partial\Omega$ Lipschitz, dann

$$\exists (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n) : \quad \| u_k|_\Omega - u \|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0.$$

($p \in [1, \infty)$)

<u>Bew</u>: [Alt, Funktionalana.]

31.10.

II.2.3 Spursatz („Punktauswertung" von Sobolevfunktionen)

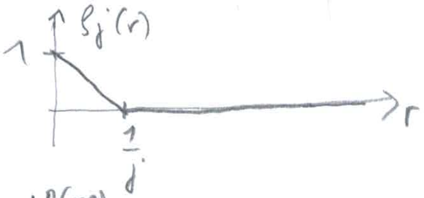
Motivation: Sei $f \in L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in \Omega$

Der Wert $f(x_0)$ macht keinen Sinn, da L^p-Fkten nur bis auf Mengen von Maß 0 definiert sind.

Frage: Gibt es einen stetigen Operator $S: L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$, der die Punktauswertung $f(x_0)$ ersetzt, d.h. für den $S(f) = f(x_0)$ $\forall f \in L^p(\Omega) \cap C(\Omega)$?

Antwort: nein

Bew: Wähle $f_j(x) := \rho_k(|x|)$, $\rho_j(r) = \begin{cases} 1 - jx, & x \in [0, \frac{1}{j}] \\ 0, & x > \frac{1}{j} \end{cases}$



$$f_j \xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^n)} 0, \text{ aber } \quad 1 = S(f_j) \not\to S(0) = 0 \quad (j \to \infty)$$

∎

Für $W^{k,p}(\Omega)$, $k \geq 1$, $p \in [1, \infty)$ existiert aber solcher Operator („Spur") !

Satz 12 (Spursatz)

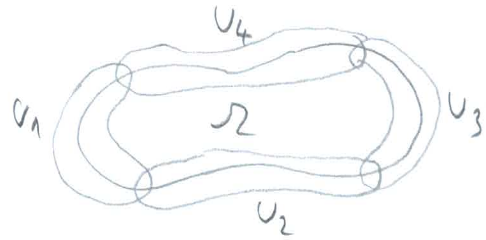
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschr. mit C^1-Rand, $p \in [1, \infty)$. Dann gibt es genau einen stetigen lin. Operator $S: W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ (Spuroperator), sodass

$$Su = u|_{\partial\Omega} \quad \text{für } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Außerdem $\quad \|Su\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $c = c(p, \Omega)$.

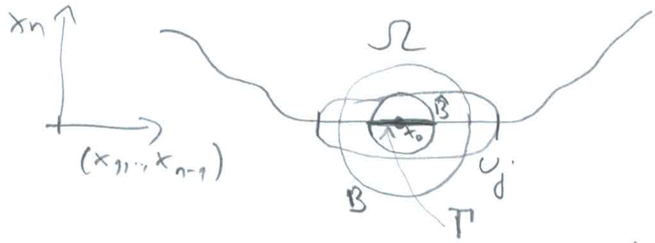
Bem: Gilt auch für Lipschitz-Ränder $\partial\Omega$ [Alt, Funkt.-Anal.]

Bew: $\partial\Omega$ ist C^1, Ω beschr. $\Rightarrow$ $\partial\Omega$ kann überdeckt werden durch endlich viele offene $U_1, \dots, U_k \subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \cap U_j$ = Graph einer C^1 Fkt und wobei $\Omega \cap U_j$ auf einer Seite des Graphes liegt $\forall j \in \{1, \dots, k\}$.



1) Sei erst $u \in C^1(\bar{\Omega})$ und $x_0 \in \partial\Omega \cap U_j$ mit einem U_j.

a) Sei $\partial\Omega \cap U_j$ flach s.d. $x_n = 0 \;\; \forall x \in \partial\Omega \cap U_j$ und Ω liegt „oben".



Sei: $\cdot\; B := B_r(x_0)$ mit $r>0$ s.d. $B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \bar{\Omega}$

$\cdot\; \hat{B} := B_{r/2}(x_0)$

$\cdot\; \zeta \in C_c^\infty(B)$ mit $\zeta \geq 0$, $\zeta \equiv 1$ auf $\hat{B}$

$\cdot\; \Gamma := \partial\Omega \cap \hat{B}$, $x' := (x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $B_+ := B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \Omega$

$$\int_\Gamma |u|^p \, dx' \leq \int_{\{x\in B:\, x_n=0\}} \zeta |u|^p \, dx' \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_{B_+} \partial_{x_n}(\zeta |u|^p)\, dx$$

$$= -\int_{B_+} |u|^p \partial_{x_n}\zeta + p|u|^{p-1}\operatorname{sign}(u)\, \partial_{x_n} u\, \zeta \, dx$$

Young: $a,b\geq 0$; $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; $p,q>1$
$\Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

$$\underset{\substack{\text{für } p>1 \\ (q=\frac{p}{p-1})}}{\overset{\text{Young}}{\leq}} -\int_{B_+} |u|^p |\partial_{x_n}\zeta| + p\zeta\left(\frac{|u|^p}{\frac{p}{p-1}} + \frac{|\partial_{x_n} u|^p}{p}\right) dx$$

$$\leq c \int_{B_+} |u|^p + |Du|^p \, dx \qquad , p>1$$

$p=1$: offensichtlich (ohne Young)

Also $\|u\|_{L^p(\Gamma)} \leq c\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, $p\in[1,\infty)$ mit $c=c(r,p)$ $\quad (*)$

b) Sei $\partial\Omega \cap U_j$ nicht flach
↪ transformiere mit einer C^1-Trafo. T s.d. $x_n = 0 \;\; \forall x\in T(\partial\Omega\cap U_j)$
und Ω liegt „oben"

2) $\partial\Omega$ kpkt $\Rightarrow \exists\, N\in\mathbb{N}$: $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j$ mit Γ_j wie oben

$(*) \Rightarrow \|u\|_{L^p(\Gamma_j)} \leq c\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, $j=1,\dots,N$

Für $Su := u|_{\partial\Omega}$ gilt also

$$(**) \quad \|Su\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}), \quad c = c(\Omega, p)$$

3) Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Nach Satz 11 $\exists (u_j)_j \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\quad (\subset C^\infty(\bar{\Omega}))$ mit

$$\|u_j|_\Omega - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0 \quad (j \to \infty)$$

$(**) \Rightarrow \|Su_j - Su_k\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c \|u_j - u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

$\Rightarrow (Su_j)_j$ Cauchy-Folge in $L^p(\partial\Omega) \Rightarrow Su := \lim_{j\to\infty} Su_j \in L^p(\partial\Omega)$

z.z. Su hängt nicht von der Wahl der Folge ab.

Seien $(u_j), (\tilde{u}_j)$ zwei solche Folgen

$$\|Su_j - S\tilde{u}_j\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c \|u_j - \tilde{u}_j\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0 \quad (j \to \infty)$$

da $u_j, \tilde{u}_j \xrightarrow{W^{1,p}} u$ ✓

noch z.z. $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \Rightarrow Su = u|_{\partial\Omega}$

Wähle die approx. Folge $(u_j)_j = (\rho_{\varepsilon_j} * u)_j$ mit $\varepsilon_j \to 0$. Nach L.3(c) $u_j \to u$ gleichm. auf $\bar{\Omega}$, $Su_j = u_j|_{\partial\Omega} \Rightarrow Su = u|_{\partial\Omega}$ ∎

Notation: wir schreiben oft $u|_{\partial\Omega}$ auch für $W^{k,p}(\Omega)$-Fkten $(k \geq 1)$

Nächstes Ziel: Sobolev-Funktionen mit Null-Randwerten

– die Konstruktion $\{u \in W^{1,p}(\Omega) : Su = 0\}$ braucht Lipschitz-Rand $\partial\Omega$

Anstatt:

Def: $W_0^{k,p}(\Omega) := \{u \in W^{k,p}(\Omega) : \exists (u_j)_j \in C_c^\infty(\Omega), \|u - u_j\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0\}$

d.h. die Vervollständigung von $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$.

Norm in $W_0^{k,p}(\Omega) = \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$

Lemma 13 $W_0^{k,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum.

Bew: z.z. Vollständigkeit

- Sei $(u_j)_j \subset W_0^{k,p}$ Cauchy. Da $W^{k,p}$ vollständig, ist $u := \lim u_j \in W^{k,p}(\Omega)$.
- $\forall j \; \exists f_j \in C_c^\infty(\Omega): \; \|u_j - f_j\|_{W^{k,p}} < \frac{1}{j}$

$\Rightarrow \|u - f_j\|_{W^{k,p}} \leq \|u - u_j\|_{W^{k,p}} + \|u_j - f_j\|_{W^{k,p}} \to 0$, also $u \in W_0^{k,p}$ ∎

Satz 14 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit Lipschitz Rand und $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1,\infty)$. Dann gilt

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \iff Su = 0.$$

Bew: $(\Rightarrow)$ Sei $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Nach der Def. $\exists (u_j)_j \subset C_c^\infty(\Omega): u_j \xrightarrow{W^{1,p}} u$.

$Su_j = 0 \;\; \forall j$, $S: W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ stetig $\Rightarrow Su = 0$

$(\Leftarrow)$ [Evans oder Alt, Funktionalana.]

Sobolevräume mit Innenprodukt

Sei $k \in \mathbb{N}_0$,

$$H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$$

$$H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$$

sind Hilberträume mit dem Innenprodukt

$$\langle f, g \rangle_{H^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha f \, D^\alpha g \, dx$$

Bem: Für $H^k(\Omega, \mathbb{C})$ ist $\langle f, g\rangle_{H^k} := \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega D^\alpha f \, \overline{D^\alpha g} \, dx$

3.11.16

Satz von Gauß & Poincaré-Ungl. im Sobolevraum

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Lemma 15 (Produktregel)

Für $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ ist $uv \in W^{1,1}(\Omega)$ und

$$\nabla(uv) = v\nabla u + u \nabla v.$$

Bew: Wähle $(u_j)_j, (v_j)_j \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ s.d. $u_j \xrightarrow{W^{1,2}} u$, $v_j \xrightarrow{W^{1,2}} v$

Übung?

- $\nabla(u_j v_j) = v_j \nabla u_j + u_j \nabla v_j$
- $u_j v_j \xrightarrow{L^1(\Omega)} uv$, weil $\int_\Omega |u_j v_j - uv| \leq \int |u_j v_j - uv_j| + |uv_j - uv|$

$$\leq \int |v_j||u_j - u| + |u||v_j - v|$$

$$\overset{C-S}{\leq} \|v_j\|_{L^2} \|u_j - u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|v_j - v\|_{L^2} \to 0$$

- $\nabla(u_j v_j) \xrightarrow{L^1(\Omega)} v\nabla u + u\nabla v$, weil

$$\int |v\nabla u_j - v\nabla u| = \int |v|\,|\nabla u_j - \nabla u| \leq \|v\|_{L^2} \|\nabla u_j - \nabla u\|_{L^2} \to 0$$

$$\left(\text{da } u_j \xrightarrow{W^{1,1}} u\right)$$

$$\int |u\nabla v_j - u\nabla v| = \ldots \to 0$$

$W^{1,1}(\Omega)$ vollst. $\Rightarrow$ $u_j v_j \xrightarrow{W^{1,1}} uv \in W^{1,1}(\Omega)$ mit $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$ ▤

Satz 16 (Gauß im Sobolevraum)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr. mit Lip.-Rand. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$, $u \in W^{1,1}(\Omega)$ und $v, w \in W^{1,2}(\Omega)$. Dann

$$\int_\Omega \partial_i u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \, \nu_i \, dS, \tag{2}$$

$$\int_\Omega v\,\partial_i w + w\,\partial_i v \, dx = \int_{\partial\Omega} vw\,\nu_i \, dS, \tag{3}$$

wobei ν die äußere Normale an $\partial\Omega$ ist.

Bew: 1) alle Integrale existieren nach Voraus.

z.B. $\int_{\partial\Omega} vw\,\nu_i \, dS = \int_{\partial\Omega} S(vw)\,\nu_i \, dS \leq \|S(vw)\|_{L^1(\partial\Omega)}$

$$\overset{(S.12)}{\leq} c\,\|vw\|_{W^{1,1}(\Omega)} = c\left(\|vw\|_{L^1} + \|v\nabla w\|_{L^1} + \|w\nabla v\|_{L^1}\right)$$

$$\overset{C-S}{\leq} c\,\|v\|_{W^{1,2}} \|w\|_{W^{1,2}}$$

2) Gleichung (2):

- $\exists (u_j)_j \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$: $u_j|_\Omega \xrightarrow{W^{1,1}(\Omega)} u$ (Satz 11)
- (2) gilt für alle j
- linke Seite: $\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \partial_i u_j \overset{u_j|_\Omega \xrightarrow{W^{1,1}} u}{=\!=\!=} \int_\Omega \partial_i u$
- rechte Seite: $\lim_{j\to\infty} \int_{\partial\Omega} S(u_j)\, \nu_i \, dS = \int_{\partial\Omega} S(u) \nu_i \, dS$, da $S: W^{1,1}(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$ stetig

3) Gleichung (3)

Wähle $u = vw$. $vw \in W^{1,1}(\Omega)$, da $v, w \in W^{1,2}(\Omega)$.

Nach L. 15 $\partial_i(vw) = v\,\partial_i w + w\,\partial_i v$

$\blacksquare$

Satz 17 (Poincaré-Ungl.)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschr. mit Lip.-Rand. Sei $p \in [1,\infty)$. Dann

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{p}{n} \operatorname{diam}(\Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \qquad (*)$$

Bew: Wegen $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $W_0^{1,p}(\Omega)$ reicht es $(*)$ für $u \in C_c^\infty(\Omega)$ z.z.

Sei $u \in C_c^\infty(\Omega)$ und $x_0 \in \Omega$ fest.

$$\operatorname{div}((x-x_0)|u|^p) = n|u|^p + (x-x_0)\cdot\nabla(|u|^p)$$
$$= n|u|^p + p \operatorname{sign}(u) |u|^{p-1} (x-x_0)\cdot \nabla u$$

$$\overset{\text{Gauß}}{\underset{u|_{\partial\Omega}=0}{\Longrightarrow}} \quad n\int_\Omega |u|^p dx = -\int_\Omega p \operatorname{sign}(u) |u|^{p-1} \nabla u \cdot (x-x_0)\, dx$$
$$\le p \operatorname{diam}(\Omega) \int_\Omega |u|^{p-1} |\nabla u|\, dx$$
$$\overset{\text{Hölder}}{\le} p \operatorname{diam}(\Omega) \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le p \operatorname{diam}(\Omega) \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

$\blacksquare$

Bem: Lip.-Rand nicht nötig in Satz 17. Wähle Ball $B_R \supset \Omega$,

$$n\int_\Omega |u|^p dx = \int_{B_R} |u|^p dx = -\int_{B_R} p \operatorname{sign}(u) |u|^{p-1} \nabla u \cdot (x-x_0)\, dx \underset{(\operatorname{supp} u \subset \Omega)}{\le} p \operatorname{diam}(\Omega) \int_\Omega |u|^{p-1} |\nabla u|\, dx \ldots$$

II.3 Fourier-Transformation

Hier immer $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Def: (Fourier-Trafo in L^1)

Für $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt

- $\hat{u}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} u(x)\,dx$, $k \in \mathbb{R}^n$ die Four.-Trafo.
- $\check{u}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot y} u(y)\,dy$, $x \in \mathbb{R}^n$ die inverse Four.-Trafo.

Lemma 18

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y - t|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}$, $t > 0$

(ii) $(\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{t}} dx = 1$, $t > 0$

Satz 19 (Plancherel)

Für $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|\hat{u}\|_{L^2} = \|\check{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}.$$

weglassen!

Bew: [Evans, §4.3] 1) $u \in L^1 \Rightarrow \hat{u}, \check{u} \in L^\infty$

- $\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\hat{w}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(y) w(y)\,dy$, da beide gleich $(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} v(x) w(y)\,dx\,dy$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \text{mit} \\ v(x) = e^{-\varepsilon|x|^2} \\ \hat{v}(y) = (2\varepsilon)^{-n/2} e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}} \end{pmatrix} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(x) e^{-\varepsilon|x|^2} dx = (2\varepsilon)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} w(y)\, e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}} dy \qquad (*)$$

2) Sei $v(x) := \bar{u}(-x)$, $w := u * v$

- $\|w\|_{L^1} = \int \left| \int u(x-y) v(y)\,dy \right| dx \le \int\int |u(x-y)v(y)|\,dy\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |u(x-y)|\,dx}_{=\|u\|_{L^1}} |v(y)|\,dy$

$= \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^1}$

$\Rightarrow w \in L^1$

- Nach L. 20(c) (mit $u, v \in L^1 \cap L^2$) : $\hat{w} = (2\pi)^{n/2} \hat{u}\hat{v}$
- $\hat{v}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} \bar{u}(-x)\,dx = (2\pi)^{-n/2} \int e^{ik\cdot y} \bar{u}(y)\,dy$

$= \overline{(2\pi)^{-n/2} \int e^{-ik\cdot y} u(y)\,dy} = \overline{\hat{u}(k)}$

$\Rightarrow \hat{w} = (2\pi)^{n/2} |\hat{u}|^2$

weglassen

3) $$\lim_{\varepsilon\to 0}(2\varepsilon)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} w(x)\,e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}dx = w(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\underbrace{(2\varepsilon)^{-n/2}\int e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}dx}_{=(2\pi)^{n/2} \text{ nach L.18 (ii)}}\Big)$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}(2\varepsilon)^{-n/2}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}(w(x)-w(0))\,e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}dx}_{I}$$

$$I = \left(y := \frac{x}{2\varepsilon^{1/2}}\right) = 2^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(w(2\varepsilon^{1/2}y)-w(0)\right)e^{-|y|^2}dy \to 0, \text{ da } w \text{ stetig}, L^1$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}(2\varepsilon)^{-n/2}\int w(x)\,e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}dx = w(0)\,(2\pi)^{n/2}$$

Also $\lim_{\varepsilon\to 0}(*)$ liefert (mit Satz von Lebesgue)

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat{w}(y)\,dy = (2\pi)^{n/2}\,w(0)$$

$$\overset{\hat{w}=(2\pi)^{n/2}|\hat{u}|^2}{\Longrightarrow}\int|\hat{u}|^2dy = w(0) = \int u(y)\,v(-y)\,dy = \int|u|^2dy$$

(analog für $\check{u}$) $\blacksquare$

Fourier-Trafo. in L^2

~~Sei $u\in L^2(\mathbb{R}^n)$~~

Problem: $\int u(x)\,e^{-ik\cdot x}dx$ ist für $u\in L^2$ erstmal undefiniert!

Ausweg: Wähle $(u_j)_j\subset L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ s.d. $u_j\xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^n)}u$

($C_c(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$, $C_c(\mathbb{R}^n)\subset L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow L^1\cap L^2$ dicht in L^2)

Plancherel $\Rightarrow \|\hat{u}_k-\hat{u}_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_k-u_j\|_{L^2} \Rightarrow (\hat{u}_j)_j$ ist Cauchy-Folge in L^2

$\Rightarrow \hat{u}_j$ konvergiert in L^2, sei $\hat{u} := \lim_{j\to\infty}\hat{u}_j$

($\hat{u}$ ist unabh. von der Wahl der Approx.-Folge)

Bem: Für $u\in L^2(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ist

$$\hat{u} := \hat{\tilde{u}}, \quad\text{wobei}\quad \tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x), & x\in\Omega \\ 0, & x\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega\end{cases}$$

Lemma 20 Sei $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} u \bar{v}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u} \bar{\hat{v}}\, dx$

(ii) $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}_0$ $\Rightarrow$ $\widehat{D^\alpha u}(y) = (iy)^\alpha \hat{u}(y)$ $\forall |\alpha| \leq k$

(iii) $(\widehat{u * v})(y) = (2\pi)^{n/2} \hat{u}(y) \hat{v}(y)$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$ falls $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(iv) $u = (\hat{u})^\vee$

Bew: (i) Evans

(ii) Sei $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\widehat{D^\alpha u}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} D^\alpha u(x)\, dx \overset{P.I.}{=} (-1)^{|\alpha|} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha (e^{-ix\cdot y}) u(x) dx$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} (iy)^\alpha u(x) dx = (iy)^\alpha \hat{u}(y).$$

Für $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ approximiere durch $(u_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (Übung)

(iii) sei $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$.

$$(\widehat{u*v})(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} \int_{\mathbb{R}^n} u(z) v(x-z)\, dz\, dx$$

$$\underset{(u,v \in L^1)}{\overset{\text{Fubini}}{=}} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot y} u(z) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-z)\cdot y} v(x-z)\, dx \right) dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot y} u(z) dz\, \hat{v}(y) = (2\pi)^{n/2} \hat{u}(y) \hat{v}(y) \qquad (*)$$

- $\widehat{u*v}$ existiert, da $u*v \in L^1$
  - folgt aus der Youngschen Ungl. für Faltungen:
    $\left(\|f*g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \text{ falls } f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n), 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \text{ mit } p, q, r \in [1, \infty] \right)$

- $\widehat{u*v}$, $\hat{u}$, $\hat{v}$ sind alle stetig in $\mathbb{R}^n$ nach L. 21 $\Rightarrow (*)$ gilt punktweise

Lemma 21 Sei $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\hat{u}$ glchm. stetig in $\mathbb{R}^n$.

Bew: Sei $\delta \in \mathbb{R}^n$. $\sup_{k \in \mathbb{R}^n} |\hat{u}(k+\delta) - \hat{u}(k)| = \sup_k \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} (e^{-i\delta\cdot x} - 1) u(x) dx \right| (2\pi)^{-n/2}$

$$\leq c \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\delta\cdot x} - 1| |u(x)| dx$$

$\longrightarrow 0$ $(\delta \to 0)$ nach Lebesg. major. konv., da $|e^{-i\delta\cdot x} - 1| |u(x)| \leq 2|u(x)|$ und $u \in L^1$

(iv) Sei $y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ und $V_\varepsilon(x) := e^{ix\cdot y - \varepsilon|x|^2}$

$$\hat{V}_\varepsilon(k) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot(k-y) - \varepsilon|x|^2} dx \overset{(L.18)}{=} (2\varepsilon)^{-n/2} e^{-\frac{|k-y|^2}{4\varepsilon}}$$

Für $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x) V_\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(k) \hat{V}_\varepsilon(k) dk$$

da beide gleich $(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} u(k) V_\varepsilon(x) \, dk \, dx$ (Fubini Ok, da $u, V_\varepsilon \in L^1$)

Also
$$\int \hat{u}(x) V_\varepsilon(x) dx = (2\varepsilon)^{-n/2} \int u(k) e^{-\frac{|k-y|^2}{4\varepsilon}} dk$$
$$= 2^{n/2} \int u(y + 2\sqrt{\varepsilon} z) e^{-|z|^2} dz \qquad \left(z = \frac{k-y}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)$$
$$= 2^{n/2} \Big[\int u(y) e^{-|z|^2} dz + \underbrace{\int \big(u(y+2\sqrt{\varepsilon}z) - u(y)\big) e^{-|z|^2} dz}_{=: I_\varepsilon(y)} \Big]$$
$$= (2\pi)^{n/2} u(y) + I_\varepsilon(y)$$

- Lebesgue-Differentiationssatz: $\left(f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \fint_{B_r(x_0)} |f(x) - f(x_0)| dx \to 0 \quad (r \to 0) \right.$ für fast alle $x_0 \in \mathbb{R}^n \Big)$

$\Rightarrow I_\varepsilon \to 0$ f.ü. in $\mathbb{R}^n$

z.z. $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x) V_\varepsilon(x) dx \to \hat{u}^\vee$ f.ü. in $\mathbb{R}^n$

cf. Seite 30,5

Also für $u \in L^1 \cap L^2$ ist $u(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x) e^{ix\cdot y} dx = (\hat{u})^\vee(y)$ f.ü. in $\mathbb{R}^n$.

Für $u \in L^2$ approximiere durch $(u_j)_j \subset L^1 \cap L^2$ ∎

Korollar 22: Die Fourier-Trafo ist isometrischer Isomorphismus aus $L^2(\mathbb{R}^n)$ nach $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Satz 23 Sei $s \in \mathbb{N}_0$, $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$

(i) $u \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff (1 + |\cdot|^s) \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$

(ii) $\exists\, C_1, C_2 > 0$:
$$C_1 \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \le \|(1+|\cdot|^s)\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C_2 \|u\|_{H^s} \qquad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Bew: 1) „$\Rightarrow$" in (i) und (ii)

Sei $u \in H^s$. Nach L.20 ist $\widehat{D^\alpha u}(k) = (ik)^\alpha \hat{u}(k) \in L^2 \quad \forall |\alpha| \le s$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x)\, v_\varepsilon(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_\varepsilon(x)\, e^{ix\cdot y}\, dy \qquad \text{mit } \hat{u}_\varepsilon(x) := \hat{u}(x)\, e^{-\varepsilon|x|^2}$$

$$= (\hat{u}_\varepsilon)^\vee(y)$$

$$\|(\hat{u}_\varepsilon)^\vee - (\hat{u})^\vee\|_{L^2} \overset{\text{Planch.}}{=} \|\hat{u}_\varepsilon - \hat{u}\|_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} (1-e^{-\varepsilon|x|^2})^2\, |\hat{u}(x)|^2\, dx$$

$$= \int_{|x|<\varepsilon^{-1/4}} (1-e^{-\varepsilon|x|^2})^2\, |\hat{u}(x)|^2\, dx + \int_{|x|\geq\varepsilon^{-1/4}} \underbrace{(1-e^{-\varepsilon|x|^2})^2}_{|\cdot|\leq 1}\, |\hat{u}(x)|^2\, dx$$

$$\leq \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \underbrace{\sup_{r<\varepsilon^{-1/4}} (1-e^{-\varepsilon r^2})^2}_{=(1-e^{-\sqrt{\varepsilon}})^2 \to 0 \ (\varepsilon\to 0)} + \underbrace{\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n\setminus B_{\varepsilon^{-1/4}})}}_{\to 0 \ (\varepsilon\to 0)}$$

$$\Rightarrow \|(\hat{u}_\varepsilon)^\vee - (\hat{u})^\vee\|_{L^2} \to 0 \quad (\varepsilon\to 0)$$

---

oder einfacher:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} (1-e^{-\varepsilon|x|^2})^2\, |\hat{u}(x)|^2\, dx \underset{\substack{\text{Lebesg.}\\ \text{major. konv.}\\ \text{Majorante: } |\hat{u}(x)|^2}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0} (1-e^{-\varepsilon|x|^2})^2}_{=0}\, |\hat{u}(x)|^2\, dx$$

$$= 0$$

Es gibt $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 > 0$: $\tilde{c}_1 (1+|k|^s)^2 \leq \sum_{|\alpha| \leq s} |k^\alpha|^2 \leq \tilde{c}_2 (1+|k|^s)^2$ (*) (Übung)

$\Rightarrow$

$$\tilde{c}_1 \|(1+|\cdot|^s)\hat{u}\|_{L^2}^2 \leq \int \sum_{|\alpha| \leq s} |k^\alpha|^2 |\hat{u}(k)|^2 dk \leq \tilde{c}_2 \|(1+|\cdot|^s)\hat{u}\|_{L^2}^2$$

2) „$\Leftarrow$" in (1)

Sei $(1+|\cdot|^s)\hat{u} \in L^2$. Nach (*) $\int \sum_{|\alpha| \leq s} |k^\alpha|^2 |\hat{u}(k)|^2 dk < \infty$.

$\Rightarrow k^\alpha \hat{u} \in L^2 \quad \forall |\alpha| \leq s \quad \Rightarrow u \in H^s$ ▥

Korollar 24: Die Fourier-Trafo ist ein Isomorphismus aus $H^k(\mathbb{R}^n)$ nach
$L^2_k(\mathbb{R}^n) := \{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1+|\cdot|^k) f \in L^2(\mathbb{R}^n) \}$.

Def (Fraktionaler Sobolevraum)
Sei $s \in (0,\infty)$.

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \hat{u} \in L^2_s(\mathbb{R}^n) \}$$

(für $s \in \mathbb{N}$ stimmt es überein mit der alten Def. von H^s)

Für $s \in (0,\infty) \setminus \mathbb{N}$ ist $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \|(1+|\cdot|)^s \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

II. 4 Sobolev-Einbettungen

allgemeine Frage: von welchen Räumen sind Sobolevräume Unterräume?

Def Für zwei normierte lin. Räume U, V mit $U \subset V$ heißt die Injektion $i : U \to V$, $u \mapsto u$ eine (identische) Einbettung.
Die Einbettung heißt stetig, falls $\|u\|_V \leq c\|u\|_U$ $\forall u \in U$ und man schreibt $U \hookrightarrow V$.

Satz 24 (Sob.-Einbettung I)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $m > \frac{n}{2} + k$.

Dann (i) $H_0^m(\Omega) \subset C_0^k(\bar{\Omega}) := \{u \in C^k(\bar{\Omega}) : D^\alpha u\big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall |\alpha| \leq k\}$
(jede H_0^m-Fkt hat einen $C_0^k(\bar{\Omega})$-Repräsentanten)

(ii) $\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} \leq c\,\|u\|_{H^m(\Omega)}$, $c = c(k, m, n, \Omega)$ $\quad \forall u \in H_0^m(\Omega)$.

d.h. $H_0^m(\Omega) \hookrightarrow C_0^k(\bar{\Omega})$.

(iii) $H_{loc}^m(\Omega) \subset C^k(\Omega)$

(iv) $\|u\|_{C^k(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} \leq C_r \|u\|_{H^m(B_r(x_0))} \quad \forall \overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$.

Bew: 1) (i)&(ii)

Sei erst $u \in C_c^\infty(\Omega)$, $x \in \bar{\Omega}$.

$$(D^\alpha u)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\, i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u}(\xi)\, d\xi$$

($\hat{u}$ definiert nach Fortsetzung von u durch Null auf $\mathbb{R}^n$)

$$|D^\alpha u|(x) \leq c \int \underbrace{(1+|\xi|)^k}_{= (1+|\xi|)^{k-m}(1+|\xi|)^m} |\hat{u}(\xi)|\, d\xi$$

$$\leq c \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2(k-m)} d\xi\right)^{1/2}}_{< \infty \text{ falls } 2(k-m) < -n} \|\hat{u}\|_{L^2_m(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq C_{k,m,n} \|\hat{u}\|_{L^2_m(\mathbb{R}^n)} = C_{k,m,n} \|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \quad \text{falls } m > \tfrac{n}{2} + k$$

d.h. (ii) gilt in C_c^∞

Sei $u \in H_0^m(\Omega)$. $\exists (u_j)_j \subset C_c^\infty(\Omega)$: $\|u_j - u\|_{H^m} \to 0$

$\|u_i - u_j\|_{C^k(\bar\Omega)} \leq c \|u_i - u_j\|_{H^m(\Omega)} \to 0 \quad (i,j \to \infty)$

$\underset{(C^k(\bar\Omega)\text{ vollst.})}{\Longrightarrow} \quad u_j \xrightarrow{C^k(\bar\Omega)} u_* \in C^k(\bar\Omega) \quad \Rightarrow u = u_* \text{ f.ü. in } \Omega.$

und $\|u_*\|_{C^k(\bar\Omega)} \leq c \|u_*\|_{H^m(\Omega)}$.

$u_j|_{\partial\Omega} = 0 \;\forall j \Rightarrow u_*|_{\partial\Omega} = 0$

10.11.16

2) (iii) & (iv). Sei $u \in H^m_{loc}(\Omega)$.

Sei $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi = \begin{cases} 1 & \text{auf } \overline{B_{\frac{1}{2}}(0)} \\ 0 & \text{auf } B_1(0)^c \end{cases}$ (Abschneide-Fkt)

Sei $x_0 \in \Omega$, $\psi_r(x) := \psi\left(\frac{x - x_0}{r}\right)$. Dann $\operatorname{supp} \psi_r \subset \overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$

$$\|D^\alpha \psi_r\|_{L^\infty} \leq r^{-|\alpha|} C_{\alpha,\psi} \qquad (*)$$

Sei noch $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon \subset C_c^\infty(\Omega)$ eine mollifier-Folge, $u_\varepsilon := \rho_\varepsilon * u$.

Dann nach S.9: $\psi_r u_\varepsilon \xrightarrow{H^k(\Omega)} \psi_r u \quad (\varepsilon \to 0)$ und $\psi_r u_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\Rightarrow \psi_r u \in H_0^k(\Omega) \overset{(ii)}{\Longrightarrow} \|\psi_r u\|_{C^k(\bar\Omega)} \leq c \|\psi_r u\|_{H^m(\Omega)} = \|\psi_r u\|_{H^m(B_r(x_0))}$$

$$\leq c \sum_{\substack{\alpha \leq m \\ \beta \leq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \|D^{\alpha-\beta}\psi\|_{L^2} \|D^\beta u\|_{L^2(B_r(x_0))}$$

$$\overset{(*)}{\leq} c\,(1 + r^{-m}) \|u\|_{H^m(B_r(x_0))}$$

$\psi_r = 1$ auf $\overline{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} \Rightarrow \|u\|_{C^k(\overline{B_{\frac{r}{2}}(x_0)})} \leq c\,(1 + r^{-m}) \|u\|_{H^m(B_r(x_0))}$

Also (analog zu 1)) $\forall x_0 \in \Omega$ und $B_r(x_0) \subset \Omega$ gilt:

$$\exists u_* \in C^k(\overline{B_{\frac{r}{2}}(x_0)}) \text{ s.d. } u = u_* \text{ f.ü. in } B_{\frac{r}{2}}(x_0)$$

Mit überlappenden Bällen folgt $\exists u_* \in C^k(\Omega)$ s.d. $u = u_*$ f.ü. in Ω

∎

Def: Für zwei normierte lineare Räume U, V mit $U \subset V$ heißt <u>U kompakt eingebettet in V</u> ($U \overset{c}{\hookrightarrow} V$ oder $U \hookrightarrow\hookrightarrow V$), falls die Injektion $i: U \to V$, $u \mapsto u$ kompakt ist, d.h.

$\forall (u_j)_j \subset U$ beschränkt hat $(u_j)_j$ eine Teilfolge, die Cauchy in V ist.

Bem: Falls V Banachraum, dann ist die TF in V konvergent.

Satz 25 (i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $k \geq 1$. Dann ist

$$H_0^k(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H_0^{k-1}(\Omega).$$

(ii) Falls zusätzlich $\partial\Omega$ Lipschitz, dann auch

$$H^k(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H^{k-1}(\Omega)$$

Bew: Teil (i).

– es reicht nur $k=1$, da für $k>1$ arbeite statt mit $(u_j)_j$ mit $\partial^\alpha u_j$, $|\alpha| \leq m-1$

1) Sei $(u_j)_j \subset H_0^1(\Omega)$ beschränkt. Zu jedem j wähle $v_j \in C_c^\infty(\Omega)$, sodass $\|u_j - v_j\|_{H^1} < \frac{1}{j}$.

(dann auch $(v_j)_j$ beschr. in H^1)

2) Approxim. von v_j:

$v_{j,\varepsilon} := \rho_\varepsilon * v_j$, wobei $\rho_\varepsilon = \rho\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}$ der mollifier ist.

z.z. $(v_{j,\varepsilon})_j$ ist gleichm. beschränkt + gleichgradig stetig (GBGS) (für ε fest)

$$|v_{j,\varepsilon}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\rho_\varepsilon(x-y)|\,|v_j(y)|\,dy \leq \|\rho_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_\Omega |v_j(y)|\,dy \leq C\varepsilon^{-n}$$

$$|\nabla v_{j,\varepsilon}(x)| \leq \|\nabla\rho_\varepsilon\|_{L^\infty} \int_\Omega |v_j(y)|\,dy \leq C\,\varepsilon^{-(n+1)}$$

$\left(C \neq C(j) \text{ weil } \int_\Omega |v_j(y)|\,dy \overset{C\text{-}S}{\leq} \|v_j\|_{L^2(\Omega)} |\Omega|^{\frac12} \leq \tilde{C} \quad ((v_j)_j \text{ beschr. in } H^1) \right)$

Also $(v_{j,\varepsilon})_j$ GBGS $\overset{\text{Arzelà-Ascoli}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ TF $(v_{j_k,\varepsilon})_{j_k}$ sodass $v_{j_k,\varepsilon}$ konv. gleichm. in $C(\bar\Omega)$

Vorsicht: die TF hängt von ε ab!

3) Finde TF (u_{j_ℓ}), die Cauchy ist in $L^2(\Omega)$.

$$|v_{j,\varepsilon}(x)-v_j(x)| = \varepsilon \left| \int_{B_1(0)} \rho(|y|) \int_0^1 \nabla v_j(x-\varepsilon t y)\cdot y \, dt \, dy \right|$$

$$\leq \varepsilon \int_0^1 \int_{B_1(0)} \rho(|y|)\, |\nabla v_j(x-\varepsilon t y)| \, dy \, dt$$

$$\overset{C-S}{\leq} \varepsilon \int_0^1 \underbrace{\left(\int_{B_1(0)} \rho(|y|) \, dy \right)^{\frac{1}{2}}}_{=1} \underbrace{\left(\int_{B_1(0)} \rho(|y|) |\nabla v_j(x-\varepsilon t y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq \|\nabla v_j\|_{L^2(\Omega)}} dt$$

$$\leq C_1 \varepsilon \quad ((v_j)_j \text{ beschr. in } H^1)$$

Sei $\delta > 0$.

$$\|u_{j_k} - u_{j_\ell}\|_{L^2(\Omega)} \leq \underbrace{\|u_{j_k} - v_{j_k}\|_{L^2}}_{< \frac{\delta}{5} \text{ für } j_k > \frac{5}{\delta}} + \underbrace{\|v_{j_k} - v_{j_k,\varepsilon}\|_{L^2}}_{< C_1 \varepsilon |\Omega|^{\frac{1}{2}}} + \underbrace{\|v_{j_k,\varepsilon} - v_{j_\ell,\varepsilon}\|_{L^2}}_{< \frac{\delta}{5} \text{ für } j_k, j_\ell > N(\delta) \text{ da } (v_{j_k,\varepsilon}) \text{ Cauchy}}$$

$$+ \underbrace{\|v_{j_\ell,\varepsilon} - v_{j_\ell}\|_{L^2}}_{< C_1 \varepsilon |\Omega|^{\frac{1}{2}}} + \underbrace{\|v_{j_\ell} - u_{j_\ell}\|_{L^2}}_{< \frac{\delta}{5} \text{ für } j_\ell > \frac{5}{\delta}}$$

$$\leq \delta \quad \text{falls} \quad \varepsilon = \varepsilon_\delta < \frac{\delta}{5 C_1 |\Omega|^{\frac{1}{2}}} \text{ gewählt wird}$$

und j_k, j_ℓ gross genug

Problem: TF-Auswahl j_k hängt von ε und also von δ ab!

Ausweg: - Wähle TF für $\delta = 1$, TF dieser TF für $\delta = \frac{1}{2}$, usw.
- Dann gehe zur Diagonalfolge über.

Teil (ii): [Alt, Funktionalanalysis]

■

<u>Satz 26</u> (Rellich)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschr. mit Lip-Rand. Dann ist

$$W^{k,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{k-1,p}(\Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N},\ p \in [1,\infty).$$

[Evans, PDE]

Satz 27 (Sobolev-Einbettung in L^p-Räumen)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschr. mit Lip.-Rand. Sei $k, l \in \mathbb{N}_0$, $k \geq l$ und $p, q \in (1, \infty)$ mit $k - \frac{n}{p} \geq l - \frac{n}{q}$. Dann

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega).$$

Falls $k - \frac{n}{p} > l - \frac{n}{q}$, dann

$$W^{k,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{l,q}(\Omega).$$

[Alt, FA]

Bsp: $n = 3$, $u \in W^{2,2}(\Omega)$

$\Rightarrow k = 2, p = 2$, $k - \frac{n}{p} = \frac{1}{2}$

- für $l = 1$ brauche $q \leq 6$
  also $u \in W^{1,q}(\Omega)$, $q \leq 6$
- für $l = 0$ geht $q < \infty$
  also $u \in L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, \infty)$.

14.11.16 ↓

Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$-(\Delta\Phi)(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\, \Delta\varphi(x)\, dx \overset{\Phi \in W^{1,1}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\Phi(x)\, \nabla\varphi(x)\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(0)} \nabla\Phi(x)\cdot\nabla\varphi(x)\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \Big[-\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(0)} \overbrace{\Delta\Phi(x)}^{=0}\, \varphi(x)\, dx - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varphi(x)\, \underbrace{\nabla\Phi(x)}_{=\tilde{\Phi}'(|x|)\cdot\frac{x}{|x|}}\cdot \frac{x}{|x|}\, dS(x) \Big]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(0)|}\, \varphi(x)\, dS(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \fint_{\partial B_\varepsilon(0)} \varphi(x) \overset{\varphi \text{ stetig}}{=} \varphi(0)$$

∎

<u>Satz 2</u> (klass. Lsg für $f \in C_c^2$)

Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$u: x \mapsto u(x) = (\Phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)\, f(y)\, dy \qquad (1)$$

eine $C^2(\mathbb{R}^n)$-Lsg von $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$.

<u>Bew</u>: [Evans]

<u>Bem</u>: 1) Die Rechnung $\Delta \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Delta\Phi(x-y)}_{=0 \text{ f.ü.}} f(y)\, dy = 0$

ist falsch, da $|\Delta\Phi(x)| \sim |x|^{-n}$, d.h. $\Delta\Phi \notin L^1(\mathbb{R}^n)$!

2) z.z., dass (1) eine distrib. Lsg ist, geht einfach:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad -(\Delta u)(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)\, f(y)\, dy\, \Delta\varphi(x)\, dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)\, \Delta\varphi(x)\, dx}_{=(z=y-x) = \int \Phi(z)\Delta\varphi(y-z)\,dz = -\varphi(y)}\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, \varphi(y)\, dy = f(\varphi)$$

III. Lineare elliptische PDEs

III.1 Poisson-Gl.: Fundamentallösung, Greensche Fkt

Poisson Gl: $-\Delta u(x) = f(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen

ggf. mit RB auf $\partial\Omega$

Sei erst $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Def: Eine Fkt $\Phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ heißt eine Fundamentallösung der Poisson-Gl., falls $-\Delta\Phi = \delta_0$ (im Distributionssinne auf $\mathbb{R}^n$)

Satz 1 Das Newtonpotential

$$\Phi(x) := \tilde{\Phi}(|x|) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log(|x|), & n=2 \\ \frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|}|x|^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases}$$

ist eine Fundamentallösung für $n \geq 2$.

Bem: 1) $S^{n-1} = \partial B_1(0)$ = Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$

2) $$\tilde{\Phi}'(r) = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{2\pi r}, & n=2 \\ -\frac{1}{|S^{n-1}| r^{n-1}}, & n \geq 3 \end{array} \right\} = -\frac{1}{|\partial B_r(0)|}$$

Bew: 1) $\Phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, da:

$$\int_{B_R(0)} |\Phi(x)|dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^R 2\pi\, r\, |\log r|\, dr < \infty, & n=2 \\ c_n \int_0^R r^{2-n}|S^{n-1}| r^{n-1}\, dr < \infty, & n \geq 3 \end{cases}$$

sogar $\Phi \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, da

$$\int_{B_R(0)} |\nabla\Phi(x)|\, dx \leq c\int_0^R |\tilde{\Phi}'(r)|\, r^{n-1} dr \leq c_n \int_0^R r^{1-n} r^{n-1} dr = cR < \infty$$

$\nabla\Phi(x) = \tilde{\Phi}'(|x|)\frac{x}{|x|}$ ← schwacher Grad.

2) z.z. $-\Delta\Phi = \delta_0$

Für $x \neq 0$ $$\Delta\Phi(x) = c_n \sum_{k=1}^n \partial_k\left(\frac{x_k}{|x|^n}\right) = c_n \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{|x|^n} - n\frac{x_k^2}{|x|^{n+2}}\right) = 0$$

Satz 3 (distributionelle Lsg für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$)

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,\infty)$, supp f kompakt. Dann ist

$$u := \Phi * f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

eine distrib. Lsg von $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$.

Bew: Wähle $(f_j)_j \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$: $\|f_j - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ (Korollar II.4)

mit supp $f_j \subset S \subset\subset \mathbb{R}^n$ $\forall j$. (S unabh. von j)

Sei $u_j := \Phi * f_j$ (Lsg von $-\Delta u_j = f_j$)

Sei $R > 0$ beliebig.

$$\|u_k - u_l\|_{W^{1,p}(B_R(0))} \le c\Big(\|u_k - u_l\|_{L^p(B_R(0))} + \underbrace{\|\nabla u_k - \nabla u_l\|_{L^p(B_R(0))}}_{=\|(\nabla\Phi)*f_k - (\nabla\Phi)*f_l\|_{L^p}}\Big)$$

$$\le c\,\|f_k - f_l\|_{L^p(S)} \underbrace{\Big(\|\Phi\|_{L^1(B_{\tilde R}(0))} + \|\nabla\Phi\|_{L^1(B_{\tilde R}(0))}\Big)}_{<\infty}$$

wegen Young für Faltungen mit $r = p$, $q = 1$, $\left(\|\varphi * \psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|\varphi\|_{L^r}\|\psi\|_{L^q}, \text{ falls } 1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q},\ r,p,q \in [1,\infty]\right)$

wobei $B_{\tilde R} \supset S + B_R$ (nur $\Phi|_{S+B_R}$ trägt bei zu $(\Phi * f_j)|_{B_R}$, weil supp $f_j \subset S$)

Also $(u_j)_j$ ist Cauchy-Folge in $W^{1,p}(B_R(0))$

$\Rightarrow u_j \xrightarrow{W^{1,p}(B_R)} u \in W^{1,p}(B_R)$

R beliebig $\Rightarrow u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$\Big\}\ u_j \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)} u$

z.z. u löst $-\Delta u = f$ distributionell.

- bilde Limes in $-\Delta u_j = f_j$

1) $f_j \xrightarrow{L^p} f \Rightarrow f_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} f$

2) $-(\Delta u_j)(\varphi) = -u_j(\Delta\varphi) \xrightarrow{(u_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} u)} -u(\Delta\varphi) = -(\Delta u)(\varphi)$

Also $-\Delta u = f$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

∎

Randwertprobleme, Greensche Funktion

Betrachte $\quad -\Delta u = f \quad$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt $\qquad$ (2)

Problem: Formel (1) erlaubt keine Kontrolle der Randwerte ($u|_{\partial\Omega}$ oder z.B. $\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega}$)

Ausweg: Greensche Funktion

↳ liefert ein Formel, wo Randwerte explizit vorkommen

Lemma 4 (Greensche Darstellung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschr. Lip.-Gebiet, $x \in \Omega$ und $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Dann gilt

(3) $$u(x) = -\int_\Omega \Phi(x-y)\,\Delta u(y)\,dy + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y)\nabla u(y)\cdot\nu(y) - u(y)\nabla_y(\Phi(x-y))\cdot\nu(y)\,dS(y).$$

Bew: Sei $\varepsilon > 0$ s.d. $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$.

$$\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} u(y)\underbrace{\Delta_y(\Phi(x-y))}_{=0} - \Delta u(y)\,\Phi(x-y)\,dy$$

$$\overset{\text{Green}}{=} \int_{\partial(\Omega\setminus B_\varepsilon(x))} u(y)\nabla_y(\Phi(x-y))\cdot\nu(y) - \Phi(x-y)\nabla u(y)\cdot\nu(y)\,dS(y)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \dots dS(y) - \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\nabla_y(\Phi(x-y))\cdot\frac{y-x}{|y-x|}\,dS(y)}_{=:I_1} + \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Phi(x-y)\nabla u(y)\cdot\nu_{B_\varepsilon(x)}(y)\,dS(y)}_{|\cdot| \le c\|u\|_{C^1(\overline{B_\varepsilon(x)})}\underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(0)}|\Phi(y)|\,dS(y)}_{\to 0\ (\varepsilon\to 0)}}$$

$$I_1 \overset{\tilde y := x-y}{=} -\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x-\tilde y)\nabla\Phi(\tilde y)\cdot\left(\frac{-\tilde y}{|\tilde y|}\right)dS(\tilde y) = \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x-y)\nabla\Phi(y)\cdot\nu_{B_\varepsilon(0)}(y)\,dS(y)$$

$$= u(x)\underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \nabla\Phi(y)\cdot\nu_{B_\varepsilon(0)}(y)\,dS(y)}_{=-1\ \text{(direkte Rechnung)}} + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \underbrace{(u(x-y)-u(x))}_{\substack{|\cdot|\le C\varepsilon \\ \text{da } u\in C^1}}\underbrace{\nabla\Phi(y)\cdot\nu_{B_\varepsilon(0)}(y)}_{=\frac{|\nu|^2}{|\partial B_\varepsilon(0)|}}\,dS(y)$$

$\to u(x) \quad (\varepsilon \to 0)$

Mit $\varepsilon \to 0$ erhalte (3) $\qquad \blacksquare$

17.11.16

a) Dirichlet RWP

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), \quad x\in\Omega \\ u(x) &= h(x), \quad x\in\partial\Omega \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

mit f, h gegeben und $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ beschr. Lip.-Gebiet.

Lsgen von (4) erfüllen nach (3)

(*) $$u(x) = \int_\Omega f(y)\,\Phi(x-y)\,dy - \int_{\partial\Omega} h(y)\nabla_y(\Phi(x-y))\cdot\nu(y)\,dS(y) + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y)\nabla u(y)\cdot\nu(y)\,dS(y)$$

- für eine explizite Formel ändere Φ, sodass letzter Term verschwindet

Sei $G(x,y) := \Phi(x-y) + w(x,y)$

sodass
$$\left.\begin{aligned} \Delta_y w(x,y) &= 0, \quad x,y\in\Omega \\ w(x,y) &= -\Phi(x-y), \quad x\in\Omega,\ y\in\partial\Omega \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Falls $w(x,\cdot)\in C^2(\bar\Omega)$ $\forall x\in\Omega$, dann

$$\int_\Omega w(x,y)\underbrace{\Delta u(y)}_{=-f(y)}\,dy - \int_\Omega u(y)\underbrace{\Delta_y w(x,y)}_{=0}\,dy \overset{\text{Green}}{=} \int_{\partial\Omega} \underbrace{w(x,y)}_{=-\Phi(x-y)}\nabla u(y)\cdot\nu(y) - \underbrace{u(y)}_{=h(y)}\nabla_y w(x,y)\cdot\nu(y)\,dS(y)$$

$\Rightarrow$
(6) $$\int_\Omega w(x,y)f(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} h(y)\nabla_y w(x,y)\cdot\nu(y)\,dS(y) - \int_{\partial\Omega}\Phi(x-y)\nabla u(y)\cdot\nu(y)\,dS(y) = 0$$

(*)+(6): $$u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} h(y)\nabla_y G(x,y)\cdot\nu(y)\,dS(y) \quad (7)$$

Def: Für eine eindeutige Lsg w von (5) mit $w(x,\cdot)\in C^2(\bar\Omega)$ $\forall x\in\Omega$ heißt
$$G_D: \left\{\begin{aligned} &\{(x,y)\in\Omega\times\bar\Omega \text{ s.d. } x\neq y\} \\ &(x,y)\longmapsto \Phi(x-y)+w(x,y) \end{aligned}\right\}$$
die Greensche Fkt für Δ zum Dirichlet-Problem auf Ω.

Satz 5: Sei $u\in C^2(\bar\Omega)$ eine Lsg von (4) und existiere die Greensche Fkt G_D. Dann gilt (7) $\forall x\in\Omega$.

Bew: obige Konstruktion

Zur Existenz von G_D (ohne Beweise)

Satz 6 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz Gebiet und $\partial\Omega$ erfülle die äußere Kegelbedingung (ÄKB). Dann existiert die G_D.

Bem: ÄKB heißt: zu jedem $x_0 \in \partial\Omega$ gibt es einen Kegel $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ sodass $\overline{K} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$

Bew: – Perron-Verfahren
[Schweizer, PDGl, §8]

Bem: G_D kann explizit bestimmt werden z.B. für
- $\Omega = B_R(0)$
- $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$
- ...

Satz 7 (H^1-Greensche-Fkt.)

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann existiert Lsg w von (5) mit $w(x,\cdot) \in H^1(\Omega)$ $\forall x \in \Omega$.

(b) Falls zusätzlich $\partial\Omega \in C^2$, dann $w(x,\cdot) \in H^2(\Omega)$.

(c) Sei Ω offen, beschr. und $\partial\Omega \in C^2$. Dann gilt (7) f.ü. in Ω für jede $H^2(\Omega)$-Lsg von (4) mit $f \in L^p(\Omega)$, $p > \frac{n}{2}$ und $h \in L^1(\partial\Omega)$.

[Schweizer, Thm. 5.7]

b) Neumann-RWP

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= g(x), \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

– für eine explizite Formel in (4) ändert man Φ, sodass der zweite Term verschwindet

$$G_N(x,y) := \Phi(x-y) + w(x,y)$$

wobei
$$\begin{aligned} \Delta_y w(x,y) &= 0, \quad x,y \in \Omega \\ \nu \cdot \nabla_y w(x,y) &= \nu \cdot \nabla_y \Phi(x-y), \quad x \in \Omega,\ y \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Für $w(x,\cdot) \in C^2(\overline{\Omega})$ $\forall x \in \Omega$ heißt G_N die Greensche Fkt für Δ zum Neum.-Problem auf Ω

Satz 8 Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lsg von (8) und existiere G_N. Dann gilt

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)\, f(y)\, dy + \int_{\partial\Omega} G(x,y)\, g(y)\, dS(y) \quad \forall x \in \Omega.$$

Bew: obige Konstruktion

III.2 Energiemethoden, schwache Formulierung

Stichwörter: Energie, Minimierung, Bilinearform, Riesz'scher Darstellungssatz, Satz von Lax-Milgram

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschr., $\partial\Omega$ Lipschitz, $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$ (ein Matrixfeld) symmetrisch, d.h. $A(x) = A^T(x)$ $\forall x$ und sei $f \in L^2(\Omega)$.

Betrachte das Funktional: ("Energie")

$$E(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} Du \cdot A Du - f u \, dx$$

Bem: E ist wohldefiniert in $H^1(\Omega)$, denn

$$\begin{aligned} |E(u)| &\leq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|A \nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2} \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \\ &\leq c \left(\|u\|_{H^1(\Omega)} + 1 \right) \|u\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Also $E: H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Minimierungsproblem mit Dirichlet-RB: Sei h gegebene Fkt auf $\partial\Omega$, löse

$$E(u_*) \stackrel{!}{=} \min_{u \in M} E(u), \qquad (9)$$

wobei $M := \{ u \in H^1(\Omega) : Su = h \text{ auf } \partial\Omega \}$.

Angenommen $u_* \in M$ löst (9). Dann gilt:

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ hat $\varepsilon \mapsto E(u+\varepsilon\varphi)$ Minimum in $\varepsilon = 0$

(weil $u+\varepsilon\varphi \in M$)

Also $$0 = \frac{d}{d\varepsilon} E(u+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_\Omega \frac{1}{2}\left(\nabla(u+\varepsilon\varphi)\cdot A\nabla\varphi + \nabla\varphi\cdot A\nabla(u+\varepsilon\varphi)\right)\Big|_{\varepsilon=0} - f\varphi \, dx$$

$$\overset{A=A^T}{=} \int_\Omega \nabla\varphi\cdot A\nabla u - f\varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

D.h. $\quad -\nabla\cdot(A\nabla u) = f \quad$ in $D'(\Omega)$

$\Big(-\nabla\cdot(A\nabla u), f \in D'(\Omega)$ wobei
$(-\nabla\cdot(A\nabla u))(\varphi) = \int_\Omega \nabla\varphi\cdot A\nabla u \, dx$, $f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \, dx \Big)$

- Also Minimierer (sogar alle krit. Punkte) von E auf M lösen
$$-\nabla\cdot(A\nabla u) = f \qquad (10)$$
im Distributionssinne.

- Falls $\nabla\cdot(A\nabla u) \in L^1_{loc}(\Omega)$, dann
$$0 = -\int_\Omega (\nabla\cdot(A\nabla u) + f)\varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$
Fundam.-Lemma $\Longrightarrow$ der Var.-Rech. $\quad$ (10) gilt f.ü. in Ω.

Bem: Für $A = I_{n\times n}$ ist (10) die Poisson-Gl. $-\Delta u = f$

Def: (Schwache Lsg für Null-Randdaten)

Eine schwache Lsg von
$$\left.\begin{aligned} -\nabla\cdot(A\nabla u) &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}\right\} \quad (11)$$
ist $u \in H_0^1(\Omega)$ mit
$$\int_\Omega \nabla\varphi\cdot A\nabla u - f\varphi \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Bem: 1) allgemeinere RB kommen später

2) die distributionelle Lsg $u \in H_0^1(\Omega)$ mit
$$\int_\Omega \nabla\varphi\cdot A\nabla u - f\varphi \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$
ist identisch mit der schwachen Lsg, da $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$.

(Übung 2 – einfach (Approx.-Folge, Vollständigkeit von $\mathbb{R}$))

Frage: Existenz einer schwachen Lsg

Def: (Dualraum)

Sei X ein reeller Banachraum. Der Dualraum ist $X' := L(X,\mathbb{R})$, d.h. der Raum der stetigen linearen Funktionale auf X.

Norm auf X': $\|F\|_{X'} := \sup\{F(u) : u \in X, \|u\|_X = 1\}$

Bsp: Falls X Hilbertraum und $u \in X$, dann $F_u(x) := \langle u, x\rangle_X$ erfüllt $F_u \in X'$, da
- F_u linear
- $|F_u(x)| = |\langle u, x\rangle| \overset{CS}{\leq} \|u\| \, \|x\|$ (d.h. F stetig)

Bem: 2) $\forall u \in X, F \in X'$ ist $|F(u)| = \|u\|_X \, |F(\frac{u}{\|u\|_X})| \leq \|u\|_X \, \|F\|_{X'}$.
1) $H_0^1(\Omega)' =: H^{-1}(\Omega)$

Satz 9 (Rieszscher Darstellungssatz in Hilberträumen)

Sei H ein Hilbertraum, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform und existieren $M, C_0 > 0$ s.d.

1) $|a(u,v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H$ (Stetigkeit)

2) $a(u,u) \geq C_0 \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H$ (Koerzivität)

Dann gibt es zu jedem $F \in H'$ genau ein $u \in H$, sodass
$$a(u, \varphi) = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in H. \qquad (12)$$

Bew 1) Eindeutigkeit:

Seien u_1, u_2 zwei Lsgen von (12). Dann
$$a(u_1 - u_2, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in H$$
$$\Rightarrow 0 = a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \overset{(\text{Koerz.})}{\geq} c\|u_1 - u_2\|_H^2 \quad \Rightarrow u_1 = u_2$$

2) Existenz (durch Energie-Minimierung)
$$E(u) := \tfrac{1}{2} a(u,u) - F(u)$$

i) E nach unten beschränkt
$$E(u) \overset{\text{koerz.}, F \in H'}{\geq} \frac{C_0}{2}\|u\|_H^2 - \|F\|_{H'} \|u\|_H \geq -\frac{\|F\|_{H'}^2}{2C_0}$$

$\left(\begin{array}{l} ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \\ \frac{a}{\varepsilon} b\varepsilon \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2 b^2\right) \text{ „}\varepsilon\text{-Ungleichung"} \end{array} \right|$ Hier $\varepsilon = \sqrt{C_0}$, $a = \|F\|_{H'}$, $b = \|u\|_H$ $\Big)$

$\Rightarrow \quad m := \inf_{u \in H} E(u) > -\infty$

ii) $\exists$ Minimalfolge $(u_j)_j \subset H$: $\quad E(u_j) \to m$

z.z. $(u_j)_j$ ist Cauchy

$$c_0 \|u_k - u_j\|_H^2 \overset{\text{koerz.}}{\leq} a(u_k - u_j, u_k - u_j)$$
$$= -a(u_k + u_j, u_k + u_j) + 2a(u_k, u_k) + 2a(u_j, u_j)$$
$$= -8E\left(\frac{u_k + u_j}{2}\right) + 4E(u_k) + 4E(u_j)$$

$$\leq -8m + 4\underbrace{E(u_k, u_k)}_{\to 4m} + 4\underbrace{E(u_j, u_j)}_{\to 4m} \to 0 \quad (k, j \to \infty)$$

iii) H vollst. $\Rightarrow u_j \to u \in H \quad (j \to \infty)$

a, F stetig $\Rightarrow E(u_j) \to E(u) = m$

iv) z.z. u ist Lsg

Sei $\varphi \in H$, $\varepsilon > 0$.

$$E(u) \leq E(u + \varepsilon\varphi) = \underbrace{\tfrac{1}{2}a(u,u)}_{} + \varepsilon a(u, \varphi) + \frac{\varepsilon^2}{2} a(\varphi, \varphi) - \underbrace{F(u)}_{} - \varepsilon F(\varphi)$$

E(u)

$$\Rightarrow \quad 0 \leq a(u, \varphi) - F(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2} a(\varphi, \varphi)$$
$$\overset{\varepsilon \to 0}{\Rightarrow} \quad 0 \leq a(u, \varphi) - F(\varphi)$$

Mit $u - \varepsilon\varphi$ (statt $u + \varepsilon\varphi$) erhalte

$$0 \leq -a(u, \varphi) + F(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2} a(\varphi, \varphi)$$
$$\varepsilon \to 0 \Rightarrow \quad 0 \geq a(u, \varphi) - F(\varphi)$$

Also es gilt (12).

<u>Bem</u>: Der klassische Satz von Riesz:

$$\forall f \in H' \; \exists!\, u \in H: \quad F(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle_H \quad \forall \varphi \in H$$

ist ein Korollar vom S. 9 mit $a(u, v) := \langle u, v \rangle_H$.

Anwendung von Rieszschen Darstellung zur Existenz schwacher Lsgen

Idee: Setze $a(u,\varphi) := \int \nabla\varphi \cdot A\nabla u \, dx$,

$H := H_0^1(\Omega)$, $F(\varphi) := \int_\Omega f\varphi \, dx$ $\quad (F \in H')$

unnötig, da Poincaré auch ohne Lip-Rand gilt!

Satz 10 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschr., Lipschitz, $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $f \in L^2(\Omega)$, $A(x)$ symmetrisch für f.a. $x \in \Omega$ und A gleichm. elliptisch, d.h. $\exists \gamma > 0$:

$$\xi \cdot A(x)\xi \geq \gamma |\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \; \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Dann $\exists!$ schwache Lsg $u \in H_0^1(\Omega)$ von (11).

Bew: $H := H_0^1(\Omega)$

z.z. $a(u,v) := \int_\Omega \nabla v \cdot A\nabla u \, dx$ ist stetig & koerziv

$F(v) := \int f v \, dx$ ist stetig und linear

i) $a: H \times H \to \mathbb{R}$ ist stetig, da

$$|a(u,v)| \leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|A\|_{L^\infty} \|v\|_H \|u\|_H$$

wobei $\|A\|_{L^\infty} = \max\limits_{i,j \in \{1,..n\}} \sup\limits_{x \in \Omega} A_{ij}(x)$

ii) a koerziv:

$$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u \cdot A\nabla u \, dx \overset{\text{ellip.}}{\geq} \gamma \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

$$= \frac{\gamma}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{\gamma}{2} \underbrace{\int_\Omega |\nabla u|^2}_{\underset{\text{(Poincaré)}}{\geq} C_P \int_\Omega u^2} \geq \tilde{c} \|u\|_H^2$$

iii) $F \in H'$

- $v \mapsto \int f v$ linear ✓
- $\left|\int_\Omega f v \, dx\right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_H \implies F$ stetig

$$\overset{\text{S.9}}{\implies} \exists! \, u \in H: \quad a(u,\varphi) = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in H$$

d.h. $\int_\Omega \nabla\varphi \cdot A\nabla u \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$ ∎

Bem: 1) Riesz liefert schwache Lsgen von (11) nicht nur für $f \in L^2(\Omega)$, sondern $F \in H^{-1}(\Omega)$, d.h. für spezielle Distributionen

$$\left(H_0^1(\Omega) \supset \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega) \right)$$

2) kompakte Schreibweise des schwachen Problems

Sei $Lu := -\nabla \cdot (A \nabla u)$

Beh: Es gilt $L : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$, wobei $(Lu)(\varphi) = \int_\Omega (A \nabla u) \cdot \nabla \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$

Bew: • $|(Lu)(\varphi)| \le \|A\|_\infty \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla \varphi\|_{L^2} \le \|A\|_\infty \|u\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1}$

d.h. Lu stetig in H_0^1

• Lu linear

$\Rightarrow Lu \in H^{-1}(\Omega)$ ∎

Also u schwache Lsg $\Leftrightarrow$ $u \in H_0^1(\Omega)$ und $Lu = F$ in $H^{-1}(\Omega)$.

Inhomogene Dirichlet-Randdaten

Betrachte

$$\left. \begin{aligned} -\nabla \cdot (A \nabla u) &= f && \text{in } \Omega \\ u &= h && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

mit $h \in H^1(\Omega)$.

• u löst (13) $\Leftrightarrow$ $v := u - h$ löst $\begin{cases} -\nabla \cdot (A \nabla v) = f + \nabla \cdot (A \nabla h) & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$

Def: $u \in H^1(\Omega)$ heißt schwache Lsg von (13) mit $h \in H^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, falls $v := u - h \in H_0^1(\Omega)$ und

$$\int_\Omega \nabla \varphi \cdot A \nabla v \, dx = \int_\Omega f \varphi - \nabla \varphi \cdot A \nabla h \, dx \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Satz 11 Unter den Voraus. von S. 10 gibt es genau eine schwache Lsg von (13). (gilt auch für rechte Seiten $F \in H^{-1}(\Omega)$).

Bew: z.z. $G : \varphi \longmapsto F(\varphi) - \int \nabla \varphi \cdot A \nabla h \, dx$ ist in $H^{-1}(\Omega)$

- linear ✓
- stetig: $|G(\varphi)| \le \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} + \|A\|_{L^\infty} \|\nabla \varphi\|_{L^2} \|\nabla h\|_{L^2}$

$$\le c \left(\|F\|_{H^{-1}} + \|A\|_{L^\infty} \|\nabla h\|_{L^2} \right) \|\varphi\|_{H^1}$$

∎

Unsymmetrische Bilinearformen & Satz von Lax-Milgram

- Riesz behandelt nur symmetrische Bilinearformen (BLF)
- betrachte

$$Lu := -\nabla\cdot(A\nabla u) + b\cdot\nabla u + cu$$

mit $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$ gleichm. elliptisch, $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$
(keine Symmetrieannahme an A !)

BLF für L: $\quad a(u,\varphi) := \int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla\varphi + (b\cdot\nabla u)\varphi + cu\varphi \, dx$

<u>Def</u>: Sei $f \in L^2(\Omega)$, $h \in H^1(\Omega)$. $u \in H^1(\Omega)$ heißt schwache Lsg von

$$\left.\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= h \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

falls für $v := u - h$ gilt $v \in H_0^1(\Omega)$ und

$$a(v,\varphi) = F(\varphi) - a(h,\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

wobei $F(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \, dx$.

(Oder, äquivalent, falls $u - h \in H_0^1(\Omega)$ und $\quad Lu = F$ in $H^{-1}(\Omega)$.) macht Sinn für alle $F \in H^{-1}$

<u>Satz 12</u> (Lax-Milgram)

Sei H ein reeller Hilbertraum, $a: H\times H \to \mathbb{R}$ eine BLF und existieren $M, c_0 > 0$ s.d.

1) $|a(u,v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u,v \in H$
2) $a(u,u) \geq c_0 \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H.$

Dann gibt es zu jedem $F \in H'$ genau ein $u \in H$ mit

$$a(u,\varphi) = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in H \qquad (15)$$

und es gilt

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{c_0} \|F\|_{H'}. \qquad (16)$$

Bew: 1) Abschätzung

Sei u Lsg von (15).

$$c_0 \|u\|_H^2 \leq a(u,u) = F(u) \leq \|F\|_{H'} \|u\|_H \quad \Rightarrow \quad \|u\|_H \leq \frac{1}{c_0} \|F\|_{H'}$$

2) Eindeutigkeit
   – wie bei Satz 9

3) Familie von BLF'en : Kontinuitätsmethode

$a_{sym} := \frac{1}{2}(a(u,v) + a(v,u))$ → symmetrische BLF

$a_{asym} := \frac{1}{2}(a(u,v) - a(v,u))$ → antisym. BLF $(a_{asym}(u,v) = -a_{asym}(v,u))$

Bem: $a = a_{sym} + a_{asym}$

BLF-Familie:

$$a_t(u,v) := a_{sym}(u,v) + t\, a_{asym}(u,v)$$

offenbar: • $a_0 = a_{sym}$, $a_1 = a$

• alle a_t sind koerziv, da

$$a_t(u,u) = a_{sym}(u,u) = a(u,u) \geq c_0 \|u\|_H^2$$

Sei $J := \{ t \in [0,1] : a_t(u,\varphi) = F(\varphi) \ \forall \varphi \in H$ hat eine Lsg $u \in H$ für alle $F \in H' \}$

d.h. die Menge aller Werte von t, für die die Gl. für alle rechte Seiten lösbar ist

Nach Satz 9: $0 \in J$ (a_0 sym. & koerziv)

Wir zeigen:

$$\exists \varepsilon > 0 : (t \in J,\ t' \in [0,1] \text{ mit } |t'-t| < \varepsilon \Rightarrow t' \in J) \qquad (P)$$

↳ dann gilt $1 \in J$, da endlich viele $\frac{\varepsilon}{2}$-Schritte $t = 1$ erreichen

4) Problem (P)

Suche $\varepsilon > 0$, s.d., falls $t \in J$, $|t'-t| < \varepsilon$, $F \in H'$, dann hat

$$a_{t'}(u,\varphi) = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in H \qquad (*)$$

eine Lsg u.

$(*) \Leftrightarrow$

$$a_t(u,\varphi) = F(\varphi) - (t'-t)\, a_{asym}(u,\varphi) \quad \forall \varphi \in H \qquad (**)$$

Fixpunktiteration für (**):

Sei $u^k \in H$ und löse

$$a_t(u^{k+1}, \varphi) = F(\varphi) - (t'-t)\, a_{asym}(u^k, \varphi) \qquad \forall \varphi \in H$$

nach $u^{k+1} \in H$. (möglich, da $t \in J$)

z.z. $S: u^k \mapsto u^{k+1}$ ist eine Kontraktion (falls $|t'-t|$ klein genug)

Sei $u^k, \bar{u}^k \in H$ gegeben und $u^{k+1} := S u^k$
$\bar{u}^{k+1} := S \bar{u}^k$

Es gilt $a_t(u^{k+1} - \bar{u}^{k+1}, \varphi) = \underbrace{F(\varphi) - F(\varphi)}_{=0} - (t'-t)\, a_{asym}(u^k - \bar{u}^k, \varphi)$

Nach (16) gilt

$$\begin{aligned}
\|u^{k+1} - \bar{u}^{k+1}\|_H &\leq \frac{1}{c_0} \|(t'-t)\, a_{asym}(u^k - \bar{u}^k, \cdot)\|_{H'} \\
&\leq \frac{1}{c_0} |t'-t|\, \|a_{asym}(u^k - \bar{u}^k, \cdot)\|_{H'} \\
&\leq \frac{1}{c_0} |t'-t|\, \frac{1}{2}\left(\|a(u^k - \bar{u}^k, \cdot)\|_{H'} + \|a(\cdot, u^k - \bar{u}^k)\|_{H'}\right) \\
&\overset{a \text{ stetig}}{\leq} \frac{M}{c_0} |t'-t|\, \|u^k - \bar{u}^k\|_H
\end{aligned}$$

Für $|t'-t| < \frac{c_0}{M}$ ist also $S: H \to H$ kontraktiv

$\overset{\text{Banach}}{\underset{\text{Fixpunktsatz}}{\Rightarrow}}$ $\exists!\, u \in H: \; u = Su$, d.h. es gilt (**)

$\Rightarrow t' \in J$. ▯

Anwendung von Lax-Milgram an das Existenzproblem

Lemma 13 (Garding-Ungleichung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschr.. Sei $a: H^1 \times H^1 \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto \int_\Omega (A \nabla u) \cdot \nabla v + (b \cdot \nabla u) v + c u v \, dx$ mit $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$ gleichm. ellip., $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Dann $\exists\, \alpha > 0, \beta \geq 0$, s.d.

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2_{H^1(\Omega)} - \beta \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H^1_0(\Omega).$$

<u>Bew</u>: $a(u,u) \overset{A\text{ ellip.}}{\geq} \int_\Omega \gamma |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega (b\cdot\nabla u)\, u\, dx + \int_\Omega c\, u^2 dx$

$$\geq \gamma \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \|b\|_\infty \underbrace{\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2}}_{\leq \frac{1}{2}\left(2\varepsilon\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|u\|_{L^2}^2\right)} - \|c\|_\infty \|u\|_{L^2}^2$$

$$\geq \mu \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \beta \|u\|_{L^2}^2 \quad \text{mit} \quad \mu = \gamma - \varepsilon\|b\|_\infty, \quad \beta = \|c\|_\infty + \frac{\|b\|_\infty}{4\varepsilon}$$

- $\mu > 0$ falls $\varepsilon < \frac{\gamma}{\|b\|_\infty}$ (d.h. klein genug)

- Poincaré-Ungl $\Rightarrow$ $\|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq C_p \|u\|_{L^2}^2$

$$\Rightarrow \mu\|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \frac{\mu}{2}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + C_p\|u\|_{L^2}^2\right) \geq \frac{\mu}{2}\min(1,C_p)\|u\|_{H^1}^2$$

Also $\quad a(u,u) \geq \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 - \beta\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad$ mit $\alpha = \frac{\mu}{2}\min(1,C_p)$ ∎

<u>Korollar 14</u> Unter den Voraus. von L. 13 gibt es ein $C_* \geq 0$, sodass falls $c(x) \geq C_*$ für f.a. $x \in \Omega$, dann

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

mit $\alpha > 0$ aus L. 13. (d.h. a koerziv!)

<u>Bew</u>: Wie im L. 13:

$$a(u,u) \geq \gamma\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \|b\|_\infty\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2} + C_*\|u\|_{L^2}^2$$

$$\geq \mu\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \left(C_* - \frac{\|b\|_\infty}{4\varepsilon}\right)\|u\|_{L^2}^2$$

Falls $C_* \geq \frac{\|b\|_\infty}{4\varepsilon}$, dann folgt $\quad a(u,u) \geq \alpha\|u\|_{H^1}^2$ ∎

<u>Satz 15</u> (<u>Existenz schw. Lsg. von (14)</u>)
Mit den Voraus. aus L. 13 und mit $\operatorname{ess\,inf}_\Omega c \geq C_*$ mit C_* aus Kor. 14 gibt es für $f \in L^2(\Omega)$ und $h \in H^1(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lsg u von (14).

(gilt auch für rechte Seiten $F \in H^{-1}(\Omega)$)

Außerdem $\quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \quad$ mit $\alpha > 0$ aus L. 13.

Bew: Sei $u = v + h$

$$Lu = F \iff Lv = F - Lh =: \tilde{F}$$

$\hookrightarrow \tilde{F} \in H^{-1}(\Omega)$

- Wende Lax-Milgram an:
  1) Stetigkeit von a.

$$|a(u,v)| \leq \|A\|_\infty \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|b\|_\infty \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|c\|_\infty \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$
$$\leq C_1 \left(\|\nabla u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\right)\left(\|\nabla v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}\right) \quad , C_1 > 0$$
$$\leq C_2 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

  2) a koerziv nach Kor. 14

$\blacksquare$

Bem: • eine untere Schranke für c ist notwendig

Bsp: $b = 0$

Fall: es gibt Eigenwerte von $u \mapsto \nabla \cdot (A \nabla u)$, d.h.

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ u_\lambda \in H^1_0(\Omega): \ -\nabla \cdot (A \nabla u_\lambda) = \lambda u_\lambda$$

$\Rightarrow$ mit $c = -\lambda$ hat

$$-\nabla \cdot (A \nabla u) + cu = 0 \quad \text{in } \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

Zwei Lsgen $u = 0,\ u = u_\lambda$ $\Rightarrow$ keine Eindeutigkeit!

z.B. $n = 1,\ A = 1$: $\quad -u'' = \lambda u \ ,\ u(0) = u(2\pi) = 0$
$\Omega = (0, 2\pi)$
$\quad \Rightarrow (\lambda, u) = (1, \sin x)$ ist Eigenpaar.

- eine Bedingung für eindeutige Lösbarkeit liefert die Fredholm-Alternative

Fredholm-Alternative

Satz 16 Sei H ein Hilbertraum und $K: H \to H$ linear und kompakt. Dann ist $K - I$ injektiv g.d.w. $K - I$ surjektiv.

Bem: K kpkt heißt $\forall (u_j)_j \subset H$ beschr. $\exists$ TF $(u_{j_k})_{j_k}$: Ku_{j_k} konvergent in H.

Bew: [Evans, § D.5]

(„Alternative": $(K-I)u = 0$ hat nichttriviale Lsg **ODER** $(K-I)u = f$ eindeutig lösbar für jedes $f \in H$)

Satz 17 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschr. mit Lip-Rand und L wie in (14). Es sind äquivalent:

(i) $\forall F \in H^{-1}(\Omega) \quad \exists!$ Lsg $u \in H_0^1(\Omega)$ von
$$Lu = F$$

(ii) $u=0$ ist die einzige $H_0^1(\Omega)$-Lsg von $Lu=0$

Bew: 1) Sei $\nu := C_* - \operatorname{ess\,inf}_\Omega c$ mit C_* aus Kor. 14

und $L_\nu u := Lu + \nu u \quad \left(= -\nabla\cdot(A\nabla u) + b\cdot\nabla u + (c+\nu)u \right)$

Nach Lax-Milgram:

$\forall F \in H^{-1}(\Omega) \quad \exists!\, u \in H_0^1(\Omega) : L_\nu u = F \quad$ in $H^{-1}(\Omega)$

d.h. $u = L_\nu^{-1} F \quad , \quad L_\nu^{-1} : H^{-1} \to H_0^1$

und $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{c} \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \qquad \forall F \in H^{-1}(\Omega)$.

(L_ν ist ein Isomorphismus)

2) offenbar

$$(*)\quad \left\{ \begin{aligned} Lu = F \quad &\Leftrightarrow \quad L_\nu u = \nu E u + F, \quad E : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega),\ u \mapsto u \ \text{(Einbettung)} \\ &\qquad \text{mit } u(\varphi) = \int_\Omega u\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ &\Leftrightarrow \quad u = L_\nu^{-1}(\nu E u + F) \\ &\Leftrightarrow \quad u - \nu L_\nu^{-1} E u = L_\nu^{-1} F \\ &\Leftrightarrow \quad (I - K)u = L_\nu^{-1} F \quad \text{mit } K := \nu L_\nu^{-1} E \end{aligned} \right.$$

3) z.z. $K : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ ist kompakt

i) E kpkt:

- sei $(u_j)_j \subset H_0^1$ beschr. $\quad$ hier $\partial\Omega$ Lip. nötig!
- $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$ (Rellich) $\Rightarrow \exists$ TF $(u_j)_j : u_j \xrightarrow{L^2(\Omega)} u \in L^2(\Omega)$

sei $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$|(Eu_j - Eu)(\varphi)| \leq \int_\Omega |u_j - u|\,|\varphi|\,dx \leq \|u_j - u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq \|u_j - u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1}$$

$\Rightarrow \|Eu_j - Eu\|_{H^{-1}} \to 0$, d.h. $Eu_j \xrightarrow{H^{-1}} Eu$

also E kpkt.

ii) K kpkt, da L_ν^{-1} stetig & E kpkt:

$$\|L_\nu^{-1} E u_j - L_\nu^{-1} E u\|_{H^1} \overset{\text{Lax-Milg.}}{\leq} \frac{1}{\alpha} \|E u_j - E u\|_{H^{-1}} \to 0$$

4) nach Fredholm <u>entweder</u> $I - K : H^1_0 \to H^1_0$ bijektiv, d.h.

nach (*) und wegen L_ν Isom.,

$$\forall F \in H^{-1} \ \exists!\, u \in H^1_0 : Lu = F$$

<u>oder</u> $I - K$ nicht injektiv, d.h. nach (*),

$$\exists u_1, u_2 \in H^1_0 : u_1 \neq u_2,\ Lu_1 = Lu_2$$

d.h. $L(u_1 - u_2) = 0$ ∎

<u>ZUSAMMENFASSUNG</u> (Existenz von schw. Lsgen für ellip. Probleme mit Dirichlet RB)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ off., beschr., Lip.

$$Lu = F \quad \text{in } H^{-1}(\Omega)$$

mit $Lu = -\nabla \cdot (A \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu$, $F \in H^{-1}(\Omega)$

$A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$ gleichm. ellip., $b, c \in L^\infty(\Omega)$

$L : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ ist ein Isomorphismus (stetig, stetige Inverse),

falls $Lu = 0$ (in H^1_0) nur trivial lösbar.

Dies ist der Fall, z.B., falls

- A symmetrisch, $b = c = 0$ (Riesz)
- $\operatorname{ess\,inf} c$ gross genug (Lax-Milgram)

Neumann-Randdaten

Satz 18 (Poincaré-Ungl. 2)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschr. mit Lip.-Rand. Sei $p \in [1,\infty)$. Dann gibt es $c = c(n,p,\Omega)$, sodass

$$\|u-(u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq c\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega),$$

wobei $(u)_\Omega := \fint_\Omega u\,dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx$.

Bew (Widerspruch)

Angenommen $(u_j)_j \subset W^{1,p}(\Omega)$ mit $\|u_j-(u_j)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \geq j\,\|\nabla u_j\|_{L^p(\Omega)}$. $\quad (*)$

Für $v_j := \dfrac{u_j-(u_j)_\Omega}{\|u_j-(u_j)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}}$ ist $(v_j)_\Omega = 0$, $\|v_j\|_{L^p} = 1 \quad \forall j$. $\quad (**)$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad \|\nabla v_j\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{j}$$

Also $(v_j)_j$ beschränkt in $W^{1,p}(\Omega) \underset{W^{1,p} \overset{c}{\hookrightarrow} L^p}{\overset{\text{Rellich}}{\Longrightarrow}} \exists\, \mathrm{TF}\,(v_j)_j : v_j \xrightarrow{L^p(\Omega)} v \in L^p(\Omega)$

$(**) \Rightarrow \|v\|_{L^p} = 1$, $(v)_\Omega = 0$

Aber
$$\int_\Omega v\,\partial_{x_i}\varphi \overset{\text{Lebesg.}}{=} \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \underbrace{v_j\,\partial_{x_i}\varphi}_{\substack{|\cdot| \leq 2M|\partial_{x_i}\varphi| \in L^1(\Omega) \\ (\text{für } j \text{ groß genug})}}\,dx = -\lim_j \int \partial_{x_i} v_j\,\varphi\,dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \lim_j \|\partial_{x_i} v_j\|_{L^p}\,\|\varphi\|_{L^{p'}} = 0$$

$\Rightarrow v \in W^{1,p}(\Omega)$, $\nabla v = 0$

$\Rightarrow v$ konstant f.ü. (Blatt 2)

$\overset{(v)_\Omega = 0}{\Longrightarrow} v = 0 \qquad \rightarrow\leftarrow$ (mit $\|v\|_{L^p} = 1$)

$\blacksquare$

Betrachte nun das Neumann-Problem

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ \nu\cdot\nabla u &= g && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

mit $f\in L^2(\Omega)$, $g\in L^2(\partial\Omega)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, beschr. mit Lip.-Rand.

Bem: 1) $-\nabla\cdot(A\nabla u)+b\cdot\nabla u+cu=f$ auch möglich.

2) die Lsg von (17) kann eindeutig nur bis auf eine Konstante sein (u Lsg $\Rightarrow$ $u+c$ Lsg)

$\hookrightarrow$ wähle eine Normierung, z.B. $(u)_\Omega=0$

Def: $u\in H^1(\Omega)$ heißt schwache Lsg von (17), falls

$$(18)\qquad \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx + \int_{\partial\Omega} g\varphi\,dS(x) \qquad \forall\varphi\in H^1(\Omega).$$

Bem: • Gl. (18) kommt durch Testen von (17) mit $\varphi\in H^1(\Omega)$

• der gewählte Raum ($H^1(\Omega)$) setzt keine Randdaten, da in (17) $u|_{\partial\Omega}$ nicht gesetzt

Setting für Lax-Milgram:

$$H:=\{u\in H^1(\Omega): (u)_\Omega=0\}$$

$$a(u,\varphi):=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx$$

$$F(\varphi):=\int_\Omega f\varphi\,dx+\int_{\partial\Omega} g\varphi\,dS(x)$$

• a stetig ✓

• a koerziv, da für $u\in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx \overset{\text{Poinc.-2}}{\geq} \frac{c}{2}\int|u-\underbrace{(u)_\Omega}_{=0}|^2\,dx+\frac{1}{2}\int|\nabla u|^2\,dx$$

$$\geq \tilde{c}\,\|u\|_{H^1}^2$$

• $F: H^1\to\mathbb{R}$ stetig, da

$$\left|\int_\Omega f\varphi\,dx-\int_{\partial\Omega} g\varphi\,dS(x)\right|\leq\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}+\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\underbrace{\|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)}}_{\leq c\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}}$$

$\leq c\,\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$ (Spursatz!)

$$\leq c \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right) \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$$

Also nach Lax-Milgram $\exists!\, u \in H$, sodass (18) gilt für alle $\varphi \in H$.

- Jedes $\varphi \in H^1$ hat die Zerlegung $\varphi = (\varphi)_\Omega + \underbrace{(\varphi - (\varphi)_\Omega)}_{\in H}$
- Gleich. (18) linear $\Rightarrow$ bleibt zu fordern, dass (18) für $\varphi \equiv$ konst. gilt

d.h. $$\int_\Omega f\, dx + \int_{\partial\Omega} g\, dS(x) = 0 \qquad (19).$$

Damit gilt:

Satz 19 (Existenz - Neumann-Problem)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschr. mit Lip.-Rand, $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\partial\Omega)$ und gelte (19). Dann existiert eine schwache Lsg $u \in H^1(\Omega)$ von (17). Die Lsg ist eindeutig unter der Normierung $\fint_\Omega u = 0$.

III.3 Regularität

Frage: Falls $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lsg von $Lu = f \in H^{-1}(\Omega)$ und Koeffizienten und rechte Seite zusätzliche Regularität haben, ist dann u in einem reguläreren Raum, z.B. $H^k(\Omega)$, $k \geq 2$?

Motivation (formal): Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ Lsg von $-\Delta u = f$, $f \in L^2(\Omega)$

a) differenziere durch
$$-\Delta \partial_i u = \partial_i f \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega)$$
$\partial_i f \in H^{-1}(\Omega) \Rightarrow \exists$ schwache Lsg $v \in H^1(\Omega)$ von $-\Delta v = \partial_i f$

Falls $v = \partial_i u$, dann $u \in H^2(\Omega)$.

Aber ist $v = \partial_i u$? Problem: $\partial_i u$ erfüllt keine einfachen RB.

Analog: falls $f \in H^m(\Omega)$, dann erwarte $u \in H^{m+2}(\Omega)$

b) $-\Delta u = f \overset{\text{formal}}{\Rightarrow} (\Delta u)^2 = f^2$

$$\int_\Omega f^2 = \int_\Omega (\Delta u)^2 = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \partial_{x_i}^2 u \, \partial_{x_j}^2 u \underset{\substack{\text{Rand} \\ \text{ignoriert}}}{\overset{\text{P.I.}}{=}} -\sum_{i,j} \int_\Omega \partial_{x_i} u \, \partial_{x_i} \partial_{x_j}^2 u$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} \sum_{i,j} \int (\partial_{x_i} \partial_{x_j} u)^2$$

$$\Rightarrow \quad \| \partial_{x_i} \partial_{x_j} u \|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \qquad \Rightarrow u \in H^2(\Omega)$$

Problem: Für $u \in H^1(\Omega)$ sind höhere Ableitungen nur distributionell und die Rechnung gilt nicht (auch wegen RB).

Rigoroser Zugang: Differenzenquotienten, Abschneiden des Randes

Def: (Differenzenquotient)

Für $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und e_i (den i-ten Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$) ist

$$\partial_i^h u(x) := \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h}, \quad \nabla^h u(x) := (\partial_1^h u, \dots, \partial_n^h u)^T$$

Lemma 20 (diskrete partielle Integration)

Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, $0<|h|<\operatorname{dist}(\Omega^c, \operatorname{supp} \varphi)$. Dann

$$\int_\Omega u \, (\partial_i^{-h} \varphi) = -\int_\Omega (\partial_i^h u) \varphi .$$

Bew: $\int_\Omega u(x) \frac{1}{h} (\cancel{\varphi(x)} - \varphi(x-he_i)) + \frac{1}{h} (u(x+he_i) - \cancel{u(x)}) \varphi(x) \, dx$

$$= -\frac{1}{h} \int_\Omega u(x) \varphi(x-he_i) \, dx + \frac{1}{h} \int_\Omega u(y) \varphi(y-he_i) \, dy = 0 \qquad \blacksquare$$

Lemma 21: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty)$, $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $V \subset\subset \Omega$.
Dann gilt für $0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(V, \partial\Omega)$, $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\| \partial_i^h u \|_{W^{k-1,p}(V)} \leq \| \partial_i u \|_{W^{k-1,p}(\Omega)}$$

und $\quad \partial_i^h u \longrightarrow \partial_i u \quad$ in $W^{k-1,p}(V) \qquad (h \to 0)$.

<u>Bew</u> (nur $k=1$)

1) sei erst $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$, $x \in V$

$$\partial_i^h u(x) = \int_0^1 \partial_i u(x + the_i)\,dt \qquad \text{(integriere den Hauptsatz der Diff.-Rechnung)}$$

$$\|\partial_i^h u\|^p_{L^p(V)} = \int_V \left| \int_0^1 \partial_i u(x+the_i)\,dt \right|^p dx$$

$$\leq \int_0^1 \underbrace{\int_V |\partial_i u(x+the_i)|^p\,dx}_{\leq \|\partial_i u\|^p_{L^p(\Omega)}}\,dt \leq \|\partial_i u\|^p_{L^p(\Omega)}$$

und $\partial_i^h u \to \partial_i u$ gleichm. auf V $\Rightarrow$ $\partial_i^h u \to \partial_i u$ in $L^p(V)$

2) sei ~~nur~~ $u \in W^{1,p}(\Omega)$

Approximation: wähle $(u_j)_j \subset W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ mit

$$u_j \to u \text{ in } W^{1,p}_{loc}(\Omega) \qquad \text{(Satz II.9)}$$

$$\|\partial_i^h u\|_{L^p(V)} = \lim_{j\to\infty} \|\partial_i^h u_j\|_{L^p(V)} \underset{\text{wie in 1)}}{\leq} \lim_j \|\partial_i u_j\|_{L^p(\tilde V)} \qquad \forall\, V \subset\subset \tilde V \subset\subset \Omega$$

$$= \|\partial_i u\|_{L^p(\tilde V)} \leq \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)} \qquad (*)$$

$$\|\partial_i^h u - \partial_i u\|_{L^p(V)} \leq \underbrace{\|\partial_i^h u - \partial_i^h u_j\|_{L^p(V)}}_{=:T_1} + \underbrace{\|\partial_i^h u_j - \partial_i u_j\|_{L^p(V)}}_{=:T_2} + \underbrace{\|\partial_i u_j - \partial_i u\|_{L^p(V)}}_{=:T_3}$$

Sei $\varepsilon > 0$.

$T_1 \overset{(*)}{\leq} \|\partial_i(u-u_j)\|_{L^p(V)} < \frac{\varepsilon}{3}$ für j groß genug

$T_3 < \frac{\varepsilon}{3}$ für j groß

$T_2 < \frac{\varepsilon}{3}$ für h klein genug (da $u_j \in C^\infty(\Omega)$)

$\blacksquare$

<u>Lemma 22</u> (schwache Kompaktheit)

Für jede beschränkte Folge $(u_j)_j \subset L^p(\Omega)$ mit $p \in (1,\infty)$ existiert eine schwach konvergente TF $(u_{j_k})_{j_k}$ ($u_{j_k} \rightharpoonup u \in L^p(\Omega)$), d.h.

$$\int_\Omega u_{j_k} v \to \int_\Omega uv \qquad \forall\, v \in L^{p'}(\Omega) \;(=(L^p(\Omega))'), \text{ wobei } \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

<u>Bew</u>: Funktionalana. oder Vorlesung PDE 2

Bem.: Falls $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, dann $\left(u_j \rightharpoonup u \text{ in } L^p(\Omega) \Rightarrow u_j \rightharpoonup u \text{ in } L^p(\tilde{\Omega}) \right)$

weil $L^p(\Omega) \subset L^p(\tilde{\Omega}) \Rightarrow L^p(\tilde{\Omega})' \subset L^p(\Omega)'$

(Fortsetzung auf größeres Def.-Bereich durch die Null)

Lemma 23 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$, $p \in (1,\infty)$, $u \in W^{k-1,p}_{loc}(\Omega)$.

Falls
$$\sum_{i=1}^n \|\partial_i^h u\|_{W^{k-1,p}(V)} \le c(u,V) \quad \forall\, V \subset\subset \Omega, \ \forall\, |h| \in (0, \operatorname{dist}(V,\partial\Omega)),$$

dann $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, $\|\partial_i u\|_{W^{k-1,2}(V)} \le c(u,V)$ (für $p=2$) $\forall i$.

Anwendung: kontrolliere die Diff-Quotienten der Lsg und gewinne so Regularität

Bew.: (nur $k=1$)

Sei $(h_j)_j \subset \mathbb{R}$ mit $h_j \to 0$ und $|h_j| \in (0, \frac{1}{2}\operatorname{dist}(V,\partial\Omega))$

Nach L. 22

$\exists$ TF $(h_j)_j$ mit $h_j \to 0$ und $v_i \in L^p(V)$ s.d.
$$\partial_i^{h_j} u \rightharpoonup v_i \quad \text{in } L^p(V)$$

z.z. $u \in W^{1,p}(V)$ und $\partial_i u = v_i$ in V

Sei $\varphi \in C_c^\infty(V)$. Dann
$$\int_V (\partial_i \varphi) u = \lim_{j\to\infty} \int_V (\partial_i^{-h_j}\varphi) u \overset{L.20}{=} -\lim_{j\to\infty} \int_V \varphi\, \partial_i^{h_j} u$$
$$\overset{\partial_i^{h_j} u \rightharpoonup v_i}{=} -\int_V \varphi v_i \qquad (*)$$

$v_i \in L^p(V)$, $u \in L^p_{loc}(\Omega) \Rightarrow u \in W^{1,p}(V)$.

Für beliebiges $W \subset\subset \Omega$ mit $V \subset\subset W$ finde $\tilde{u} \in W^{1,p}(W)$.

Es gilt $u|_V = \tilde{u}|_V$, da schwache Abl. eindeutig. $\Rightarrow u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$

Abschätzung: $(*)$ gilt auch für $\varphi \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ nach Approximation (Satz 9)

wähle $\varphi = \partial_i u$
$$\Rightarrow \int_V (\partial_i u)^2 = \lim_j \int_V \partial_i u\, \partial_i^{h_j} u \le \|\partial_i u\|_{L^2(V)} \sup_j \|\partial_i^{h_j} u\|_{L^2(V)} \le c(u,V)\, \|\partial_i u\|_{L^2(V)}$$

Satz 24 (innere a-priori Abschätzung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$ gleichm. ellip. auf Ω, $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$,
(mit Konstante $\gamma > 0$)
$c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, $F \in H^{-1}(\Omega)$ und

$$Lu := -\nabla \cdot (A \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu .$$

Sei $\|A\|_{L^\infty}, \|b\|_{L^\infty}, \|c\|_{L^\infty} \leq \Lambda$.

Dann $\forall\, V \subset\subset \Omega \;\; \exists\, c = c(V, \Omega, \Lambda, \gamma)$ s.d. jede $H^1(\Omega)$-Lsg u von

$$Lu = F \text{ in } H^{-1}(\Omega)$$

die Abschätzung

$$\|u\|_{H^1(V)} \leq c \left(\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

erfüllt.

Bem.: S.24 folgt nicht aus Lax-Milg., da Koerzivität von a ggf nicht gilt

Bew:

- Abschneiden um Rändern zu vermeiden: • wähle $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\eta = 1$ auf $V \subset\subset \Omega$, $0 \leq \eta \leq 1$.

  • sei $v := u\eta^2 \;\; (\in H_0^1(\Omega))$

- u schwache Lsg $\Rightarrow \int \nabla\varphi A \nabla u = F(\varphi) - \int \varphi\, b \cdot \nabla u - \int \varphi c u \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla(u\eta^2) A \nabla u = F(u\eta^2) - \int_\Omega u\eta^2 (b \cdot \nabla u + cu)$$

linke Seite: $\int_\Omega \eta^2 \nabla u \cdot A \nabla u + 2u\eta \nabla\eta \cdot A \nabla u$

$$\underset{\& \ \varepsilon\text{-Ungl}}{\overset{\text{ellip.}}{\geq}} \gamma \int \eta^2 |\nabla u|^2 - \|A\|_\infty \varepsilon \int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2 - \|A\|_\infty \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |\nabla\eta|^2 u^2$$

rechte Seite $\underset{\varepsilon\text{-Ungl.}}{\leq} \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\eta^2 u\|_{H^1(\Omega)} + \Lambda \left(\varepsilon \int \eta^2 |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int \eta^2 u^2 + \int \eta^2 u^2 \right)$

$$\leq c \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \left((1 + c(\eta)) \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\eta \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \right) + \Lambda \varepsilon \int \eta^2 |\nabla u|^2 + \Lambda \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\underset{\varepsilon\text{-Ungl}}{\leq} (\Lambda\varepsilon + C_1\varepsilon) \|\eta \nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\Lambda, V)\left(1 + \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon\right) \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \tilde{c} \frac{1}{\varepsilon} \|F\|^2_{H^{-1}(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|\gamma \nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{c(\Lambda, V)}{\gamma - \varepsilon(\Lambda + \|A\|_\infty + C_1)} \left[\left(1 + \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\|F\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \right]$$

$\leq$

$\|\nabla u\|^2_{L^2(V)}$ $\Rightarrow$ für ε klein genug s.d. $\gamma - \varepsilon(2\Lambda + C_1) > \frac{\gamma}{2}$:

$$\|u\|^2_{H^1(V)} \leq \frac{2c(\Lambda,V)}{\gamma}\left[\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|F\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right] + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|u\|_{H^1(V)} \leq \tilde{c}(\Lambda, V, \gamma)\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}\right)$$

$\boxed{}$

Satz 25 (<u>H^2-Regularität im Inneren</u>)

Unter den Voraus. von S. 24, falls zusätzlich $A \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$, $\|\partial_i A\|_{L^\infty} \leq \Lambda$ und $u \in H^1(\Omega)$ ist eine schwache Lsg von

$$Lu = f \in L^2(\Omega),$$

dann für jedes $V \subset\subset \Omega$ gilt $u \in H^2(V)$ und

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq c(\Omega, V, \Lambda, \gamma)\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

und u erfüllt $Lu = f$ punktweise f.ü. in Ω.

<u>Bew:</u> 1) Sei $L_0 u := -\nabla \cdot (A \nabla u)$

- $Lu = f \Leftrightarrow L_0 u = \tilde{f}$ mit $\tilde{f} = f - b \cdot \nabla u - cu$

  $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$, da $u \in H^1(\Omega)$, $b, c \in L^\infty(\Omega)$
- $\forall\, \Omega_1 \subset\subset \Omega$ gilt

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega_1)} \leq c(\Lambda)\|u\|_{H^1(\Omega_1)} + \|f\|_{L^2(\Omega_1)} \overset{S.24}{\leq} c(\Omega, \Omega_1, \Lambda, \gamma)\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

2) wähle $V \subset\subset V_1 \subset\subset V_2 \subset\subset \Omega$ und $0 < |h| < \min\{\mathrm{dist}(V_1, \partial V_2), \mathrm{dist}(V_2, \partial\Omega)\}$

- $\partial_i^h u \in H^1(V_1)$
- für $v \in H_0^1(V_1)$ mit $v = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus V_1$ gilt

$$\int_{V_1} \nabla v \cdot (A \partial_i^h u) = \int_{V_2} \nabla v \cdot (A \partial_i^h u) \overset{L.20}{=} -\int_{V_2} \partial_i^{-h}(\nabla v \cdot A)\nabla u$$

$$= -\int_{V_2} \nabla(\partial_1^{-h} v)\cdot A\nabla u + \nabla v(\cdot - he_1)\cdot(\partial_1^{-h} A\nabla u)$$

$$\overset{(\partial_1^{-h} v\in H_0^1(V_2))}{\underset{\&\; y:=x-he_1}{\overset{PDE}{=}}} -\int_{V_2} \tilde f\,\partial_1^{-h} v - \underbrace{\int_{V_2-he_1} \nabla v\cdot(\partial_1^{h} A\nabla u(\cdot+he_1))}_{=\int_{V_1}}$$

$$=: F_1^h(v)$$

$\partial_1^{-h}(\varphi\psi)(x) = \frac{\varphi(x)\psi(x)-(\varphi\psi)(x-he_1)}{h}$

$= \psi(x)\,\partial_1^{-h}\varphi(x) + \frac{\psi(x)\varphi(x-he_1)}{h}$

$- \frac{(\varphi\psi)(x-he_1)}{h}$

$= \psi(x)\,\partial_1^{-h}\varphi(x) - \varphi(x-he_1)\,\partial_1^{-h}\psi(x)$

$(\partial_1^{-h}A)(y+he_1) = \partial_1^{h}A(y)$

D.h. $\partial_1^h u$ ist schw. Lsg von $L_0\,\partial_1^h u = F_1^h$ in V_1

z.z. $F_1^h \in H^{-1}(V_1)$

- $A\in W^{1,\infty}(\Omega) \Rightarrow A$ Lipschitz und $\|\partial_1^h A\|_{L^\infty(V_1)} \le \|\partial_1 A\|_{L^\infty(V_2)} \le \Lambda$ (Übung)
- $v\in H^1(V_2) \overset{L.21}{\Rightarrow} \|\partial_1^{-h} v\|_{L^2(V_1)} \le \|\nabla v\|_{L^2(V_2)} = \|\nabla v\|_{L^2(V_1)}$

$\Rightarrow F_1^h \in H^{-1}(V_1)$

$$\|F_1^h\|_{H^{-1}(V_1)} \le \|\tilde f\|_{L^2(V_2)} + \Lambda\,\|\nabla u\|_{L^2(V_2)}$$

$$\overset{1)\,\&\,S.24}{\le} c(\Lambda,\Omega,V_2)\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

3) Mit S. 24 folgt aus $L_0\,\partial_1^h u = F_1^h$

$$\|\partial_1^h u\|_{H^1(V)} \le c\left(\|F_1^h\|_{H^{-1}(V_1)} + \|\partial_1^h u\|_{L^2(V_1)}\right)$$

$$\overset{2)\,\&\,L.21}{\le} c\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_1 u\|_{L^2(V_2)}\right)$$

$$\overset{S.24}{\le} c\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

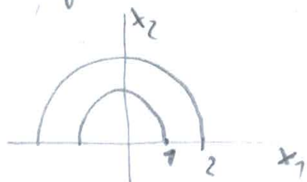
4) L. 23 $\Rightarrow u\in H^2_{loc}(\Omega)$ ▯

<u>Bem</u>: S. 24 und S. 25 setzen nichts über $\partial\Omega$ oder die RB von u voraus!

Satz 26 (a-priori Abschätzung am Rand)

Sei L wie im S. 24, $\Omega := B_2(0)_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 2,\ x_n > 0\}$, $F \in H^{-1}(\Omega)$, $h \in H^1(\Omega)$. Falls $u \in H^1(\Omega)$ schwache Lsg von

$$\begin{aligned} Lu &= F && \text{in } \Omega \\ u &= h && \text{auf } B_2(0) \cap \{x_n = 0\}, \end{aligned}$$



dann

$$\|u\|_{H^1(B_1(0)_+)} \leq C(\gamma, \Lambda)\left(\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|h\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Bew: OBdA sei $h = 0$ (sonst betrachte $\tilde{u} := u - h$ und $L\tilde{u} = \tilde{F} := F - Lh \in H^{-1}(\Omega)$)

Also $u \in H^1_0(\Omega)$. Wähle $\eta \in C_c^\infty(B_2(0))$, $\eta \equiv 1$ auf $B_1(0)$, $0 \leq \eta \leq 1$.

- $v := \eta^2 u \in H^1_0(\Omega)$ ist eine zulässige Testfkt

$\Rightarrow$ genauso wie im S. 24 aus

$$\int_\Omega \nabla(u\eta^2) A \nabla u = F(u\eta^2) - \int_\Omega u\eta^2 (b \cdot \nabla u + cu)$$

folgt

$$\underbrace{\int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2}_{\geq \|\nabla u\|^2_{L^2(B_1(0)_+)}} \leq \frac{C}{\gamma - \varepsilon(2\Lambda + c_1)}\left[\varepsilon^{-1}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^{-1}\|F\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right]$$

Satz 27 (H^2-globale Regularität)

Sei Ω und L wie im S. 25 und sei zusätzlich Ω beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$ ($C^{1,1}$ reicht), $h \in H^2(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Falls $u \in H^1(\Omega)$ schwache Lsg von

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{in } \Omega \\ u &= h && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

dann ist $u \in H^2(\Omega)$ und

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c(\Omega, \Lambda, \gamma)\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{H^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right). \quad (*)$$

<u>Bem:</u> Falls $Lu=0$ in $H^1_0(\Omega)$ nur trivial lösbar ist, dann ist nach Fredholm-Altern. L ein Isomorphismus und $u-h$ erfüllt $\|u-h\|_{H^1(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)}$

$$\Rightarrow \|u\|_{H^1(\Omega)} \le \|u-h\|_{H^1(\Omega)} + \|h\|_{H^1(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \|u\|_{H^2(\Omega)} \le c\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{H^2(\Omega)}\right)$$ (d.h. kein u rechts)

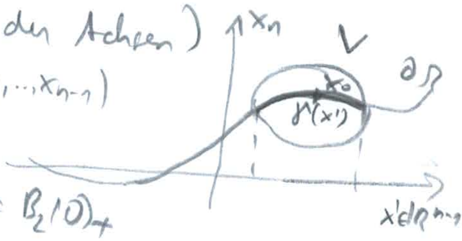
<u>Bew:</u> 1) OBdA sei $h=0$, sonst betrachte $\tilde{u} := u-h$, $\tilde{f} := f - Lh$

2) $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ nach S. 25

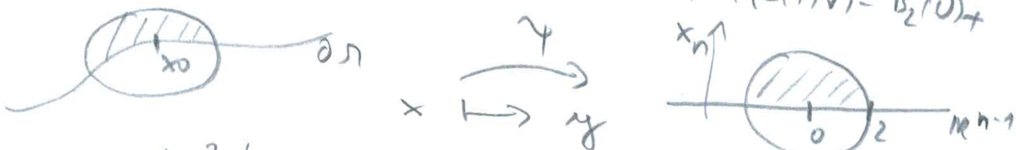
3) lokale Trafo zum flachen Rand

Sei $x_0 \in \partial\Omega$ beliebig. $\partial\Omega \in C^2 \Rightarrow \exists\, V := B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ Umgebung von x_0 und C^2-Fkt $\gamma: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ s.d. (ggf nach Umbenennen der Achsen)

$$\Omega \cap V = \{x \in V : x_n > \gamma(x')\}, \quad x' := (x_1, \dots, x_{n-1})$$



Trafo: $\Psi: V \to B_2(0)$ mit $\Psi(x_0) = 0$, $\Psi(\Omega \cap V) = B_2(0)_+$



nämlich $\Psi_i(x) := \begin{cases} \frac{2}{r}(x_i - x_{0i}), & i=1,\dots,n-1 \\ \frac{2}{r}\cdot(x_n - \gamma(x')), & i=n \end{cases}$ $\to$ ein C^2-Diffeomorphismus $\det D\Psi = \frac{2^n}{r^n}$ $(r = r(x_0))$

• Für $\tilde{u} := u \circ \Psi^{-1}$ gilt $\tilde{u} \in H^1(B_2(0)_+) \cap H^2_{loc}(B_2(0)_+)$ (cf. Lemma 28)

<u>Beh:</u> $\tilde{u}$ ist schwache Lsg von

$$\tilde{L}\tilde{u} = \tilde{f} \quad \text{in } B_2(0)_+$$
$$\tilde{u} = 0 \quad \text{auf } B_2(0) \cap \{x_n = 0\}$$

mit $\tilde{L}, \tilde{f}$ die die gleichen Eigenschaften wie L, f haben (glm. ellip. $\tilde{A}$, Beschränktheit)

<u>Bew:</u> Sei $\tilde{v} \in H^1_0(B_2(0)_+)$. Dann $v := \tilde{v} \circ \Psi \in H^1_0(\Omega \cap V)$

$$u \text{ Lsg} \Rightarrow \int_{\Omega\cap V} vf = \int_{\Omega \cap V} \nabla v \cdot A\nabla u + v\, b\cdot\nabla u + c u v$$

Mit $u(x) = \tilde{u}(\psi(x))$, $v(x) = \tilde{v}(\psi(x))$ ist:

- $\nabla u(x) = [\nabla \tilde{u}(\psi(x))^T D\psi(x)]^T = D\psi(x)^T \nabla \tilde{u}(\psi(x)) = (D\psi(\psi^{-1}(y)))^T \nabla \tilde{u}(y)$
- linke Seite $= \int_{B_2(0)_+} \tilde{v}(y) \underbrace{f(\psi^{-1}(y)) \, |\det D\psi^{-1}(y)|}_{=: \tilde{f}(y)} dy$

- rechte Seite:

Übung

i) $$\int_{\Omega\cap V} \nabla v \cdot A \nabla u = \int_{B_2(0)_+} [(D\psi)^T(\psi^{-1}(y)) \, \nabla \tilde{v}(y)]^T A(\psi^{-1}(y)) \, (D\psi)^T(\psi^{-1}(y)) \, \nabla \tilde{u}(y) \cdot |\det D\psi^{-1}(y)| \, dy$$

$$= \int_{B_2(0)_+} \nabla \tilde{v}^T \underbrace{\left((D\psi)|_{\psi^{-1}} A \circ \psi^{-1} (D\psi)^T|_{\psi^{-1}} |\det D\psi^{-1}| \right)}_{=: \tilde{A}} \nabla \tilde{u}$$

ii) $$\int_{\Omega\cap V} v b \cdot \nabla u = \int_{B_2(0)_+} \tilde{v}(y) \, b(\psi^{-1}(y))^T \, (D\psi)^T(\psi^{-1}(y)) \, \nabla \tilde{u}(y) \, |\det D\psi^{-1}(y)| \, dy$$

$$= \int_{B_2(0)_+} \tilde{v} \underbrace{\left((D\psi)|_{\psi^{-1}} \, b \circ \psi^{-1} \, |\det D\psi^{-1}| \right)^T}_{=: \tilde{b}} \nabla \tilde{u}$$

iii) $$\int_{\Omega\cap V} c u v = \int_{B_2(0)_+} \underbrace{c \circ \psi^{-1} \, |\det D\psi^{-1}|}_{=: \tilde{c}} \, \tilde{u} \, \tilde{v}$$

Übung

$\tilde{A}$ gleichm. ellip.: sei $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\xi^T \tilde{A}(y) \xi = \underset{\substack{\parallel \\ \det D\psi^{-1}}}{\frac{r^n}{2^n}} \left((D\psi)^T|_{\psi^{-1}} \xi \right)^T A \circ \psi^{-1} \left((D\psi)|^T_{\psi^{-1}} \xi \right)$$

$$\overset{A \text{ ellip}}{\geq} \gamma \frac{r^n}{2^n} |\eta|^2 \quad \text{mit } \eta := (D\psi)^T|_{\psi^{-1}} \xi$$

$$\geq \underbrace{C \gamma \frac{r^n}{2^n}}_{=: \tilde{\gamma}} |\xi|^2, \quad \text{da } |\xi| = |(D\psi)^{-T}|_{\psi^{-1}} \eta| \leq C |\eta|$$

- $\tilde{A} \in W^{1,\infty}(B_2(0)_+)$, $\tilde{b}, \tilde{c} \in L^\infty(B_2(0)_+)$, da $D\psi \in C^1(V)$

4) Abschätzung von $\|\partial_{ij} \tilde{u}\|_{L^2}$

$\tilde{L} \tilde{u} = \tilde{f} \iff \tilde{L}_0 \tilde{u} = f'$ mit $f' := \tilde{f} - \tilde{b} \cdot \nabla \tilde{u} - \tilde{c} \tilde{u}$

$$\|f'\|_{L^2(B_{\frac{3}{2}}(0)_+)} \leq \|\tilde f\|_{L^2(B_{\frac{3}{2}}(0)_+)} + c\left(\|\tilde u\|_{H^1(B_{\frac{3}{2}}(0)_+)} + \|\tilde u\|_{L^2(B_{\frac{3}{2}}(0)_+)}\right)$$

$$\overset{S.26}{\leq} c\left(\|\tilde f\|_{L^2(B_2(0)_+)} + \|\tilde u\|_{L^2(B_2(0)_+)}\right)$$

$$\leq c\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

Sei jetzt $i \in \{1,\dots,n-1\}$, $|h| \in (0, \frac{1}{4})$

$\partial_i^h \tilde u \in H^1(B_{\frac{5}{4}}(0)_+)$ ist schwache Lsg von

$\tilde L_0(\partial_i^h \tilde u) = f_i'^h$ (cf. Bew. von S. 25)

Bem: Verschiebung in Richtung i ist „horizontal" $\Rightarrow$ fällt nicht aus dem Def.in.-Bereich $B_{3/2}(0)_+$ von $\tilde u$

$$S.26 \Rightarrow \|\partial_i^h \tilde u\|_{H^1(B_1(0)_+)} \leq c\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

$$\overset{\text{Abschätz. in L.23}}{\Longrightarrow} \|\partial_i \tilde u\|_{H^1(B_1(0)_+)} \leq \text{— || —}$$

$$\Rightarrow \|\partial_i\partial_j \tilde u\|_{L^2(B_1(0)_+)} \leq c\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right) \quad (**) \quad \forall j \in \{1,\dots,n\} \ \forall i \in \{1,\dots,n-1\}$$

Da $\partial_{ij}\tilde u = \partial_{ji}\tilde u$, gilt $(**)$ auch für $i=n$, $j \in \{1,\dots,n-1\}$

- noch abzuschätzen: $\partial_n^2 \tilde u$

$$\tilde L_0 \tilde u = f' \Rightarrow \partial_n^2 \tilde u = -\frac{1}{\tilde A_{nn}}\left(\sum_{(i,j)\neq(n,n)} \tilde A_{ij}\,\partial_{ij}^2 \tilde u - f'\right)$$

$\tilde A_{nn} = e_n^T \tilde A e_n \geq \tilde\mu > 0 \quad \Rightarrow (**)$ gilt auch für $(i,j)=(n,n)$

- Also $\tilde u \in H^2(B_1(0)_+)$ (S. 26 liefert eine H^1-Abschätzung)

$$\|\tilde u\|_{H^2(B_1(0)_+)} \leq c\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

$$\overset{u=\tilde u\circ\Psi}{\Longrightarrow} \|u\|_{H^2(\Omega\cap V_{\frac{1}{2}})} \leq c\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

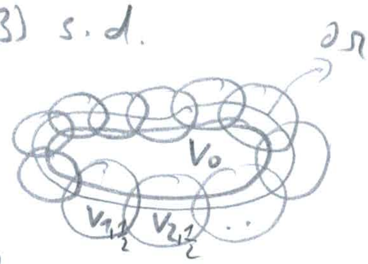
$V_{\frac{1}{2}} := B_{r/2}(x_0)$

(wähle Ψ so dass $\Psi(V_{\frac{1}{2}}\cap\Omega) = B_1(0)_+$)

5) Überdecke $\partial\Omega$

$\partial\Omega$ kpkt $\Rightarrow$ $\exists$ endlich viele $V_1, \dots, V_N$ wie in 3) s.d.

$$\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{N} V_{j,\frac{1}{2}} \cap \partial\Omega$$



wähle $V_0 \subset\subset \Omega$ s.d. $\Omega = \left(\bigcup_{j=1}^{N} V_{j,\frac{1}{2}} \cap \Omega \right) \cup V_0$

Mit S. 25 für V_0 und mit 4) für jedes $V_{j,\frac{1}{2}} \cap \Omega$ folgt den Satz.

$\blacksquare$

<u>Lemma 28</u> (Parameterwechsel)

Sei $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$, $\Psi : \Omega_1 \to \Omega_2$ bijektiv mit Ψ, Ψ^{-1} Lipschitz-stetig und die Lip.-konstanten beschränkt durch Λ. Für $u \in W^{1,p}(\Omega_2)$, $p \in [1, \infty]$ gilt dann

$$u \circ \Psi \in W^{1,p}(\Omega_1)$$
$$\nabla(u \circ \Psi) = D\Psi^T (\nabla u \circ \Psi).$$

weiter
$$\|u \circ \Psi\|_{W^{1,p}(\Omega_1)} \leq c(\Lambda, n) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega_2)}$$

<u>Bem</u>: $D\Psi$ = schwache Abl. ($W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$ = lokal-Lip.-stetig Fktn, cf. Evans)

<u>Bew</u>: [Alt, Funkt.-Ana.]

III.4 Maximum-Prinzipien für ellip. Glen in nicht-divergenz-Form

(20) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und betrachte

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i\, \partial_i u + c u$$

mit $A := (a_{ij})_{ij} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$, $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, wobei A gleichm. elliptisch ist $(\exists \gamma > 0: \ \xi^T A(x) \xi \geq \gamma |\xi|^2 \ \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n)$

Bem: 1) L ist ein ellip. Operator in nicht-divergenz-Form

2) Für A glatt, kann L in div-Form geschrieben werden:

$$\nabla\cdot(A\nabla u) = \sum_{ij} a_{ij}\,\partial_{ij} u + \partial_i a_{ij}\, \partial_j u$$

$$\Rightarrow Lu = \nabla\cdot(A\nabla u) + \sum_j \underbrace{\Big(b_j + \sum_i \partial_i a_{ij}\Big)}_{=:\tilde{b}_j} \partial_j u + cu$$

3) Falls $u \in C^2(\Omega)$, dann ist OBdA $\underline{A \text{ symmetrisch}}$, weil $\partial_{ij} u = \partial_{ji} u$, also $\sum_{ij} a_{ij}\,\partial_{ij} u = \sum_{ij} \tilde{a}_{ij}\,\partial_{ij} u$ mit

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \quad (\text{d.h. } \tilde{A} \text{ symmetrisch})$$

Ziel: Zeige: „$Lu \leq 0$ in $\Omega \Rightarrow \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$“

(das Maximum wird am Rand angenommen)

Bsp: $Lu := -\Delta u + b\cdot\nabla u$

Sei $Lu < 0$ und sei $x_0 \in \Omega$ ein Max-Punkt von $u \in C^2(\Omega)$.

Dann $\nabla u(x_0) = 0$, $\partial_{jj} u(x_0) \leq 0 \ \forall j$

$\Rightarrow Lu(x_0) \geq 0 \quad \rightarrow\leftarrow$, also keine inneren Maxima.

Satz 29 (schwaches Maximumprinzip)

Sei Ω und L wie in (20) und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$. Falls $Lu \le 0$, dann

(i) $\max\limits_{\bar\Omega} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$ falls $c \equiv 0$ in Ω

(ii) $\max\limits_{\bar\Omega} u \le \max\limits_{\partial\Omega} u_+$ falls $c \ge 0$ in Ω.

($u_+ := \max\{u, 0\}$ = positiver Teil von u)

Bew: 1) sei erst $Lu < 0$ in Ω

Angenommen $\exists\, x_0 \in \Omega$: $u(x_0) = \max\limits_{\bar\Omega} u =: M$

$\Rightarrow \nabla u(x_0) = 0$, $D^2 u(x_0) = (\partial_{ij} u(x_0))_{ij} \le 0$ (d.h. negativ semidefinit)

• $A(x_0)$ symmetrisch $\Rightarrow A(x_0) = Q^T \Lambda Q$, wobei $Q^T Q = I$ und $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ mit $\lambda_i > 0 \; \forall i$ (da A elliptisch)

$Q = (q_1 \dots q_n)$

$$A(x_0) = \begin{pmatrix} — q_1 — \\ \vdots \\ — q_n — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ q_1 & \dots & q_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 q_{11} & \dots & \lambda_n q_{1n} \\ \vdots & & \\ \lambda_1 q_{n1} & \dots & \lambda_n q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ q_1 & \dots & q_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{ij}(x_0) = \sum_{k=1}^n \lambda_k q_{ik} q_{jk}$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0)\partial_{ij} u(x_0) = \sum_k \lambda_k \underbrace{\sum_{i,j=1}^n q_{ik}\, \partial_{ij} u(x_0)\, q_{jk}}_{= q_k^T D^2 u(x_0) q_k \;\le 0}$$

$$\le 0 \text{ , da } \lambda_k > 0 \; \forall k$$

Also

$$0 > Lu(x_0) = \underbrace{-\sum a_{ij}(x_0)\partial_{ij} u(x_0)}_{\ge 0} + \underbrace{b \cdot \nabla u(x_0)}_{=0} + c(x_0) u(x_0) \ge c(x_0) M$$

a) $c(x_0) = 0$ oder $c(x_0) \ge 0$, $M \ge 0$
- dann Widerspruch, also $M = \max\limits_{\partial\Omega} u$

$\Rightarrow$ (i) gilt, (ii) gilt falls $M \ge 0$

b) $M < 0$
↳ dann $\max_{\partial\Omega} u_+ = 0$ und (ii) gilt automatisch.

2) Sei $Lu \leq 0$.
Betrachte $u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{\mu x_1}$ mit $\varepsilon, \mu > 0$.

$$Lu_\varepsilon \leq \varepsilon L(e^{\mu x_1}) = \varepsilon e^{\mu x_1}(-\mu^2 a_{11} + \mu b_1 + c)$$
$$\underset{\text{(A ellip.)}}{\leq} \varepsilon e^{\mu x_1}(-\mu^2 \gamma + \mu b_1 + c) \qquad (a_{11} = e_1^T A e_1)$$

$\gamma > 0$, b, c beschränkt $\Rightarrow \exists\, \mu > 0$ (groß genug) s.d. $-\mu^2\gamma + \mu b_1 + c < 0$ auf Ω

Dann $Lu_\varepsilon < 0$ in Ω $\forall \varepsilon > 0$.
Also (i), (ii) gelten für u_ε.

(i): $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{x\in\partial\Omega} e^{\mu x_1}$

Mit $\varepsilon \to 0$ gilt $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u$ $\quad$ ($\geq$ gilt offenbar)

(ii) $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u_{\varepsilon +} \leq \max_{\partial\Omega} u_+ + \varepsilon \max_{x\in\partial\Omega} e^{\mu x_1}$ $\blacksquare$

<u>Korollar 30</u> Unter gleichen Voraus. aber mit $Lu \geq 0$ in Ω gilt
(i) $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$, $c \equiv 0$
(ii) $\min_{\overline{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u_-$, $c \geq 0$

($u_- := \max\{u, 0\}$

<u>Bew:</u> Wende S.29 auf $-u$ an (Bem: $\max(-u) = -\min u$) $\blacksquare$

<u>Korollar 31</u> Unter gleichen Voraus. aber mit $Lu = 0$ in Ω gilt
$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$$

<u>Bew:</u>
$$\left.\begin{aligned} \max_{\overline{\Omega}} u &\overset{S.29}{\leq} \max_{\partial\Omega} u_+ \leq \max_{\partial\Omega} |u| \\ \max_{\overline{\Omega}}(-u) &= -\min_{\overline{\Omega}} u \overset{K.30}{\leq} \max_{\partial\Omega} u_- \leq \max_{\partial\Omega} |u| \end{aligned}\right\} \Rightarrow \max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u|$$

Satz 32 (Eindeutigkeit der klassischen Lsg des Dirichlet-Problems)

Seien Ω, L wie in (20) und $c \geq 0$. Dann hat für $f \in C(\Omega)$, $h \in C(\partial\Omega)$ das Problem

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= h \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

höchstens eine $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$-Lsg.

Bew: Seien $u, \tilde{u}$ zwei Lsgn. $\Rightarrow$ $\begin{aligned} L(u-\tilde{u}) &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u-\tilde{u} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$

$$\overset{\text{Kor. 31}}{\Longrightarrow} \quad \max_{\Omega} |u-\tilde{u}| = 0$$

$\blacksquare$

nächstes Ziel: $Lu \leq 0$, u hat inneres Maximum $\Rightarrow$ u ist konstant
(starkes Max-Prinzip)

Def: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt in $x_0 \in \partial\Omega$ die innere Kugel-Bedingung (IKB), falls $\exists B_r(x_1) \subset \Omega$ s.d. $x_0 \in \partial B_r(x_1)$

Bem: Falls $\partial\Omega \in C^2$, dann erfüllt $\partial\Omega$ in jedem Pkt die IKB.

Satz 33 (Hopf-Randpunktlemma)

Seien Ω, L wie in (20) und Ω erfülle in $x_0 \in \partial\Omega$ die IKB. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, existiere die äußere Normalenableitung $\nu(x_0) \cdot \nabla u(x_0)$ und gelte

$$\begin{aligned} Lu &\leq 0 \quad \text{in } \Omega \\ u(x_0) &> u(x) \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

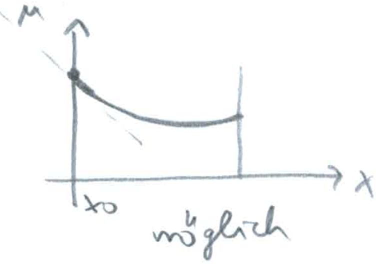
Falls (a) $c = 0$ in Ω
ODER
(b) $c \geq 0$ in Ω und $u(x_0) \geq 0$,

dann

$$\nu(x_0) \cdot \nabla u(x_0) > 0.$$

Bem: 1) $\nu(x_0)\cdot\nabla u(x_0)\geq 0$ ist trivial wegen der Maximalität in x_0.

2) z.B. in 1D ($n=1$) ist also



Bew: 1) Wähle eine innere Kugel $B_r := B_r(z)\subset\Omega$: $\overline{B_r(z)}\cap\partial\Omega=\{x_0\}$

OBdA sei $z=0$.

2) Setze für $\mu>0$

$$v(x) := e^{-\mu|x|^2}-e^{-\mu r^2}\ ,\ x\in\overline{B_r}$$

- $v\geq 0$ auf $\overline{B_r}$, $v\big|_{\partial B_r}=0$
- für μ groß ist $v\approx 1$ nahe $x=0$

$$Lv(x)=e^{-\mu|x|^2}\Big(-4\mu^2\sum_{ij}a_{ij}(x)x_ix_j+2\mu\sum_{ij}a_{ij}(x)\delta_{ij}-2\mu\sum_i b_i(x)x_i+c(x)\Big)$$
$$-c(x)\,e^{-\mu r^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}A \text{ elliptisch} \Rightarrow \sum a_{ij}(x)x_ix_j\geq\gamma|x|^2\\ A,b,c \text{ beschränkt}\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\text{für } \mu \text{ hinreichend groß ist}\\ Lv(x)<0 \text{ für alle } \frac{r}{2}<|x|<r\end{array}$$

d.h. in $R:=B_r/B_{r/2}$

3) Sei $w:=u+\varepsilon v$

- $w=u$ auf ∂B_r
- auf $\partial B_{r/2}$ ist $w\leq u(x_0)$ für ε klein genug (da $u(x)<u(x_0)$ $\forall x\in\Omega$ und $\partial B_{r/2}\subset\Omega$ kpkt)

$\Rightarrow$ $u(x)\leq u(x_0)$ $\forall x\in\partial R$

- $Lw=Lu+\varepsilon Lv<0$
- schwaches Max-Prinzip in R $\Rightarrow$ $w\leq u(x_0)$ auf $\overline{R}$

Also w hat Max. in x_0 $\Rightarrow$ $\nu(x_0)\cdot\nabla w(x_0)\geq 0$

Also in x_0:

$$\nu\cdot\nabla u=\nu\cdot\nabla w-\varepsilon\nu\cdot\nabla v\geq-\varepsilon\nu\cdot\nabla v=2\varepsilon\mu r e^{-\mu r^2}>0$$

$\boxed{\Xi}$

Satz 34 (starkes Maximumprinzip)

Sei Ω, L wie in (20) und Ω zusammenhängend. Für $u \in C^2(\Omega)$ gelte $Lu \leq 0$ in Ω. Falls u dann maximal in $x_0 \in \Omega$ ist und falls

(a) $c \equiv 0$

oder

(b) $c \geq 0$, $u(x_0) > 0$,

dann ist u konstant auf Ω.

<u>Bew</u>: Sei $\Sigma := \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ $\quad (\Sigma \neq \emptyset$, da $x_0 \in \Sigma)$

Angenommen $\Sigma \neq \Omega$.

<u>Beh.</u>: $\exists\, z \in \Omega \setminus \Sigma : \operatorname{dist}(z, \Sigma) < \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$

<u>Bew</u>: Sei $z_0 \in \Omega \setminus \Sigma$ beliebig.

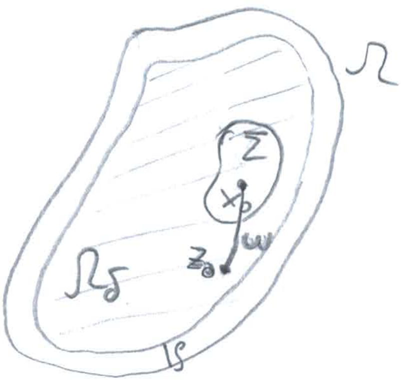
Sei $\rho < \min\{\operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega), \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)\}$

$\Omega_\rho := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \rho\}$

(gilt nicht, falls Ω nicht zusammenhängend:

<u>Bsp</u>: 

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$)



$x_0 \in \Omega_\rho \Rightarrow \Omega_\rho \cap \Sigma \neq \emptyset$

$z_0 \in \Omega_\rho \Rightarrow \Omega_\rho \setminus \Sigma \neq \emptyset$

Ω zusammenh. $\Rightarrow \exists$ Weg w von z_0 nach x_0, $w \subset \Omega$

Wähle also $z \in (\Omega_\rho \setminus \Sigma) \cap w$ mit $\operatorname{dist}(z, \Sigma) < \rho$ ∎

Sei nun z wie in der Behauptung und $r := \operatorname{dist}(z, \Sigma)$.

Es gilt $\overline{B_r(z)} \subset \Omega$, $\exists\, y \in \partial B_r(z) \cap \Sigma$

$\Rightarrow Lu \leq 0$ auf $B_r(z)$, u maximal in $y \in \partial B_r(z)$

$\overset{\text{Hopf}}{\Rightarrow} \nu \cdot \nabla u(y) > 0 \quad \longrightarrow \lightning$ (mit y inneres Max.)

∎

Satz 35 (Eindeutigkeit für das Neumann-Problem)

Sei Ω, L wie in (20), $c \geq 0$, $f \in C(\Omega)$, $h \in C(\partial\Omega)$, Ω zusammenhängend und jedes $x_0 \in \partial\Omega$ erfülle die IKB. Das Neumann-RWP

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{in } \Omega \\ \nu \cdot \nabla u &= h && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

hat bis auf eine additive Konstante höchstens eine Lsg $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega)$.

Bew: Sei $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega)$ die Differenz von zwei Lsgen.

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} Lv &= 0 && \text{in } \Omega \\ \nu \cdot \nabla v &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

1) Sei $M := \max_{\bar\Omega} v \geq 0$.

Falls $\exists\, x_0 \in \Omega$ mit $v(x_0) = M$, dann $v \equiv$ Konst. wegen S. 34

Falls $\exists\, x_0 \in \partial\Omega$ mit $v(x_0) = M > v$ in Ω, dann $\nu \cdot \nabla v > 0$ nach Hopf. $\rightarrow\leftarrow$

Also $v \equiv$ konst., falls $\max_{\bar\Omega} v \geq 0$

2) $\max_{\bar\Omega} v < 0$. Dann $\max_{\bar\Omega}(-v) > 0 \Rightarrow -v \equiv$ konst.

Satz 36 (schwaches Max.-Prinzip mit rechter Seite)

Sei Ω, L wie in (20), $c \geq 0$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$, $f \in C(\Omega)$ und gelte

$$Lu \leq f \quad \text{in } \Omega .$$

Dann

$$\max_{\bar\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} u_+ + \tilde{c} \sup_{\Omega} f_+ \quad , \quad \tilde c = \tilde c(\Omega, \gamma, \Lambda),$$

wobei γ die Ellip.-konstante ist, $\mathbb{R} \ni \Lambda \geq \max\{\|A\|_{L^\infty(\Omega)}, \|b\|_{L^\infty(\Omega)}, \|c\|_{L^\infty(\Omega)}\}$

Bew: OBdA $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \in (0,d)\}$ mit einem $d > 0$.

Sei $L_0 v := Lv - cv$ und $\alpha > 0$

$$L_0(e^{\alpha x_1}) = (-\alpha^2 a_{11} + \alpha b_1)\, e^{\alpha x_1} \le (-\alpha^2 \gamma + \alpha \Lambda)\, e^{\alpha x_1}$$

$$\le -1 \quad \text{für } \alpha \text{ groß genug} \qquad (*)$$

Sei $V(x) := \max\limits_{\partial\Omega} u_+ + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \sup\limits_{\Omega} f_+$

$$L_0 V = L_0\left(-e^{\alpha x_1} \sup_\Omega f_+\right) \ge \sup_\Omega f_+ \quad \text{für } \alpha \text{ groß genug}$$

$$\left.\begin{aligned} L(u-V) &= Lu - L_0 V - cV \le f - \sup_\Omega f_+ \le 0 \quad \text{in } \Omega \\ u - V &\le u - \max_{\partial\Omega} u_+ \le 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\overset{\text{S.29}}{\Rightarrow} \quad \max_\Omega (u-V) \le 0 \quad \Rightarrow \quad \max_\Omega u \le \max_\Omega V \le \max_{\partial\Omega} u_+ + \underbrace{(e^{\alpha d} - e^0)}_{=:\tilde{C}} \sup_\Omega f_+$$

■

Maximumprinzip im Sobolevraum

Betrachte L in Divergenzform:

(21) $Lu := -\nabla\cdot(A\nabla u) + cu$ mit $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$, $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ und A glchm. ellip. in Ω

$(L: H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega))$

Betrachte $u_+ := \max\{u, 0\}$

Lemma 37 (Stampacchia)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Dann gilt $u_+ \in W^{1,p}(\Omega)$ und

$$\nabla u_+ = (\nabla u)\, \chi_{\{u>0\}}$$

Bew: Blatt 4

Satz 38 (Max.-Prinzip im Sobolevraum)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und L wie in (21) und $c \geq 0$. Für ein $u \in H^1(\Omega)$ gelte

$$\left(\int_\Omega \nabla\varphi \cdot A\nabla u + cu\varphi \, dx = \right) \; Lu(\varphi) \leq 0 \qquad \forall\, \varphi \in H^1_0(\Omega),\ \varphi \geq 0$$

und $u - h \in H^1_0(\Omega)$ mit einem $h \in H^1(\Omega)$, $h \leq m \in \mathbb{R}^0_+$ f.ü. auf Ω. Dann gilt

$$u \leq m \quad \text{f.ü. auf } \Omega.$$

Bew: Setze $\varphi := (u-m)_+ \qquad (\geq 0)$

$\varphi \in H^1_0(\Omega)$, da $\quad S\varphi = (Su - m)_+ = (\underbrace{Sh - m}_{\leq 0})_+ = 0$

(Für $S v_+ = (Sv)_+ \ \forall\, v \in H^1(\Omega)$ cf. Übung)

$\chi := \chi_{(u \geq m)}$

$$0 \geq \int_\Omega \sum_{ij} a_{ij}(x)\, \partial_i u(x)\, \partial_j \varphi(x) + c(x)\, u(x)\, \varphi(x)\, dx$$

$$= \int_\Omega \sum_{ij} a_{ij}(x)\, \partial_i (u-m)(x)\, \partial_j (u-m)(x)\, \chi(x) + \underbrace{c(x)}_{\geq 0}\, \underbrace{u(x)}_{\substack{\geq m \geq 0 \\ \text{auf supp}\, \chi}}\, \underbrace{(u-m)(x)\, \chi(x)}_{\geq 0}\, dx$$

$$\geq \int \sum a_{ij}(x)\, \partial_i (u-m)(x)\, \partial_j (u-m)(x)\, \chi(x) + c(x)\, (u-m)^2(x)\, \chi(x)\, dx$$

$$= \int \underbrace{\sum a_{ij}(x)\, \partial_i \varphi(x)\, \partial_j \varphi(x)}_{\geq \lambda |\nabla\varphi(x)|^2} + c(x)\, |\varphi(x)|^2\, dx \geq 0, \text{ da } A \text{ ellip., } c \geq 0$$

$\overset{c \geq 0}{\Longrightarrow} \quad \nabla\varphi = 0$ f.ü.

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \overset{\text{Poinc.}}{\leq} c_p \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \implies \varphi = 0 \text{ f.ü. in } \Omega$$

$$\implies u \leq m \text{ f.ü.}$$

∎