Tomáš Dohnal
Nils Dabrock

Blatt 11

Abgabe: bis Montag 23.1.2017 in der Vorlesung
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen)

Aufgabe 1 (20 Punkte):
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$ gleichmäßig elliptisch und $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$-\nabla \cdot (A\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Für ein gegebenes konvexes $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ setzen wir $w := \phi(u)$. Zeigen Sie, dass w eine schwache Unterlösung ist, d.h.

$$\int_\Omega \nabla v \cdot A\nabla w \leqslant 0$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega), v \geqslant 0$.

Aufgabe 2 (15 Punkte):
Sei u eine glatte Lösung von

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

Zeigen Sie, dass $v(x,t) := x \cdot \nabla u(x,t) + 2t\partial_t u(x,t)$ auch eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.
Hinweis: Nutzen Sie aus, dass x_j und $\partial_{x_j} u$ für $j \in \{1,\ldots,n\}$ auch Lösungen sind und untersuchen Sie die Wärmeleitungsgleichung für das Produkt zweier Lösungen.

Aufgabe 3 (25 Punkte): (*Wärmeleitungskern mit L^1 Funktionen*)
Zeigen Sie für den Wärmeleitungskern H und eine beliebige Funktion $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dass

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} H(\cdot - y, t) g(y) dy - g(\cdot) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{für } t \searrow 0.$$

Hinweis: Approximieren Sie g durch eine $C_c(\mathbb{R}^n)$-Funktion.

Aufgabe 4 (25 Punkte): (*Nichtlineare Wärmeleitungsgleichung*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $0 \leqslant u_0 \in C(\Omega)$ mit $u_0 \not\equiv 0$. Zeigen Sie, dass das Existenzintervall $(0, T)$ für das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= u^2 \text{ in } \Omega \times (0,T) \\ \nabla u \cdot \nu &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(0) &= u_0 \text{ auf } \partial\Omega \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

endlich ist, d.h. es gibt ein $T' = T'(u_0, \Omega) > 0$, sodass für $T > T'$ keine glatte Lösung u existiert.
Hinweis: Leiten Sie für den räumlichen Mittelwert $m(t) := ⨍_\Omega u$ von u eine gewöhnliche Differentialungleichung her. Bestimmen Sie dann die Lösung h der zugehörigen gewöhnlichen Differentialgleichung und zeigen Sie, dass $m(t) \geqslant h(t)$ ist.

Aufgabe 5 (15 Punkte): (*Nicht-wohlgestellte Wärmeleitungsgleichung*)
Zeigen Sie, dass die Wärmeleitungsgleichung mit vorgegebenen stetigen Daten auf $\partial\Omega$, sowie in $t = 0$ und $t = T$ im Allgemeinen kein wohlgestelltes Problem ist (die Existenz einer Lösung gilt für spezielle Daten nicht).
Betrachten Sie dazu im Detail für ein offenes, beschränktes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ das Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u =& 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,T) \\ u =& \phi \quad \text{auf } \partial(\Omega \times (0,T)) \end{aligned}$$

und wählen Sie $\phi \in C(\partial(\Omega \times (0,T)))$ so, dass das Problem keine Lösung hat.
Hinweis: Verwenden Sie das Maximumprinzip.