Blatt 12

Abgabe: bis Montag 30.1.2017 in der Vorlesung
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen)

Aufgabe 1 (25 Punkte): (*Satz 11 (iii)*)
Seien Ω, T und L wie in (5) aus der Vorlesung und sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$. Für ein $\Lambda > 0$ gelte $c \geqslant -\Lambda$ in Ω_T. Zeigen Sie, dass falls

$$\begin{aligned} \partial_t u + Lu \leqslant& 0 \quad \text{in } \Omega_T \\ u \leqslant& 0 \quad \text{auf } \Gamma_T, \end{aligned}$$

dann ist $u \leqslant 0$ in Ω_T.

Aufgabe 2 (50 Punkte): (*Zeitlicher Abfall in der Wärmeleitungsgleichung auf beschränktem* Ω)
Betrachten Sie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit einem glatten Rand und $g \in H^1(\Omega)$.

(a) Es sei u eine glatte Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u =& 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ u =& 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times [0,\infty) \\ u =& g \quad \text{auf } \Omega \times \{0\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$e^{-ct}\|g\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant e^{-\lambda_1 t}\|g\|_{L^2(\Omega)}, \ t \geqslant 0,$$

wobei λ_1 der kleinste Eigenwert von $-\Delta$ auf Ω mit homogenen Dirichlet-Randdaten ist und $c > 0$ eine von g abhängige Konstante. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Es sei $E(t) := \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}$.
2. Leiten Sie für E' eine geeignete Abschätzung her und folgern Sie daraus

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant e^{-\lambda_1 t}\|g\|_{L^2(\Omega)}, \ t \geqslant 0.$$

3. Zeigen Sie, dass $E''(t) \geqslant 0$ ist und $E'(t)^2 \leqslant E(t)E''(t)$ für $t > 0$.
4. Zeigen Sie, dass $f(t) := \log E(t)$ für alle $t > 0$ mit $E(t) \neq 0$ konvex ist.
5. Folgern Sie daraus die Behauptung mit $c = -f'(0)$.

Hinweis: Für λ_1 *gilt die Rayleigh-Formel* $\lambda_1 = \inf_{\substack{\psi \in H_0^1(\Omega) \\ \psi \neq 0}} \frac{\|\nabla\psi\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)}}$.

(b) Sei u eine glatte Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u + cu &= 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times [0,\infty) \\ u &= g \quad \text{auf } \Omega \times \{0\}. \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $c > 0$ und $g \in L^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$u(x,t) \leqslant e^{-ct}\|g\|_{L^\infty(\Omega)}, \ (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,\infty).$$

Aufgabe 3 (25 Punkte): (*Bochnerraum-Norm*)
Sei $T > 0$, $p \in [1,\infty)$ und X ein Banachraum.

(a) Weisen Sie die Norm-Eigenschaften von $\|\cdot\|_{L^p(0,T;X)}$ nach.

(b) Betrachten Sie nun $X = H^s(\mathbb{R}^n)$ mit $s > \frac{n}{2}$. Es ist bekannt, dass für $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ auch das Produkt $uv \in H^s(\mathbb{R}^n)$ ist mit $\|uv\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ und einer von u und v unabhängigen Konstanten $C > 0$.

Zeigen Sie, dass für $p \in (1,\infty)$

$$\|fg\|_{L^1(0,T;H^s(\mathbb{R}^n))} \leqslant C\|f\|_{L^p(0,T;H^s(\mathbb{R}^n))}\|g\|_{L^{p'}(0,T;H^s(\mathbb{R}^n))}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

für alle $f \in L^p(0,T;H^s(\mathbb{R}^n))$ und $g \in L^{p'}(0,T;H^s(\mathbb{R}^n))$ gilt.