Tomáš Dohnal
Nils Dabrock

Blatt 8

Abgabe: bis Montag 19.12.2016 in der Vorlesung
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen)

Aufgabe 1 (20 Punkte): (*Neumann-Randdaten*) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit Lipschitz-Rand und ν der äußere Normalenvektor. Weiter sei $u \in H^2(\Omega)$ eine schwache Lösung des Neumann-Problems zu $f \in L^2(\Omega)$, es gelte also

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega)\,.$$

Zeigen Sie, dass u die Gleichungen

$$-\Delta u \;\; = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial u \cdot \nu = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

im Distributionssinn beziehungsweise im Spursinn erfüllt.

Bem.: Die Aufgabe zeigt, dass die Neumann-Randdaten "natürlich" sind, in dem Sinne, dass sie durch die schwache Formulierung und die Wahl des Testraumes H^1 automatisch erfüllt werden.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass eine Funktion $h \in H^1(\Omega)$ mit Spur $S(h) = \nabla u \cdot \nu$ existiert. (Dies ist eine Folgerung des Satzes von Kirszbraun.)

Aufgabe 2 (30 Punkte): (*Neumann-Randdaten 2: Existenz und Fredholm-Alternative*) Betrachten Sie für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit Lipschitz-Rand das Problem

$$Lu = F + G \text{ in } (H^1(\Omega))'$$

mit

$$Lu = -\nabla \cdot (A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu,$$

wobei $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$ gleichmäßig elliptisch, $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ und mit

$$F \in (H^1(\Omega))', \qquad G(\varphi) := \int_{\partial\Omega} g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}S(x) \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega),$$

wobei $g \in L^2(\partial\Omega)$.

(a) Zeigen Sie, dass genau ein $u \in H^1(\Omega)$ mit $Lu = F + G$ in $(H^1(\Omega))'$ existiert, falls $c^* := \operatorname{essinf}_\Omega c$ groß genug ist.

(b) Zeigen Sie, dass $L : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))'$ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $Lu = 0$ in $(H^1(\Omega))'$ nur trivial lösbar ist.

(c) Formulieren Sie das Randwertproblem, dessen schwache Lösung durch $Lu = F + G$ beschrieben wird.

Aufgabe 3 (25 Punkte): (*Helmholtz-Zerlegung*)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit C^2-Rand. Wir betrachten Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit verschwindender Normalenkomponente am Rand, d.h.

$$u \in H^1_*(\Omega, \mathbb{R}^n) := \left\{ u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \middle| \, u \cdot \nu = 0 \text{ auf } \partial\Omega \right\} .$$

Zeigen Sie, dass sich jede Funktion $u \in H^1_*(\Omega, \mathbb{R}^n)$ zerlegen lässt in einen divergenzfreien Anteil und einen Gradienten: Für alle $u \in H^1_*(\Omega, \mathbb{R}^n)$ existieren $w, g \in H^1_*(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $u = w + g$ und es gilt

$$\nabla \cdot w = 0 \text{ in } \Omega, \qquad \exists\, \psi \in H^2(\Omega) : \; g = \nabla\psi \, .$$

Zeigen Sie außerdem, dass diese Zerlegung eindeutig ist. Wir können also den Raum zerlegen in

$$H^1_*(\Omega) = W \oplus Z$$

mit $L^2(\Omega)$-orthogonalen Unterräumen W und Z.
Hinweis: Leiten Sie zunächst formal aus der Darstellung von u eine Gleichung für ψ her. Verwenden Sie dann ohne Beweis, dass Lösungen der Poisson-Gleichung in Ω in $H^2(\Omega)$ liegen.

Aufgabe 4 (25 Punkte): Zeigen Sie, dass eine Funktion $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ einen Lipschitz-stetigen Vertreter $\tilde{u}$ mit Lipschitz-Konstante $\|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ besitzt.

Bem.: Deswegen gilt auch $\|\partial_i^h u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\partial_i u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, wobei $\partial_i^h u$ der Differenzenquotient von u ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Glättungen $u_\varepsilon := u * \rho_\varepsilon$ mit dem Glättungskern ρ_ε und zeigen Sie zunächst $\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Nutzen Sie außerdem, dass $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ fast überall punktweise gegen u konvergiert.
Bemerkung: Die Folge $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ approximiert u nicht in $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.