Übersicht der wichtigsten Themen und Resultate

Kapitel I - Einleitung

- Form der wichtigsten PDEs (Poissongl., Wärmeleitungsgl., Wellengl., Schrödingergl.)
- Herleitung der Poissongleichung für das Gravitationspotential
- Begriff der klassischen Lösung und seine Nachteile

Kapitel II - Distributionen und Sobolevräume

1. **Distributionen**
    - Definition, Beispiele
    - distributionelle Ableitung, distributionelle Konvergenz
    - Dirac-Folge, Glättung (mollification) von L^1_{loc}-Funktionen
    - Fundamentallemma der Variationsrechnung
    - distributionelle Lösung einer PDE
2. **Sobolevräume**
    - schwache Ableitung und ihre Eigenschaften, Raum $W^{k,p}(\Omega)$
    - Approximation von $W^{k,p}(\Omega)$-Funktionen durch glatte Funktionen
        - lokale Approximation im offenen Ω
        - globale Approximation im offenen, beschränkten Ω
    - Spursatz in $W^{1,p}(\Omega)$
    - Räume $W^{k,p}_0(\Omega), H^k(\Omega), H^k_0(\Omega)$
    - Satz von Gauß und Poincaré (mit Null-Randdaten) für Sobolevräume
    - Fourier-Transformation
        - Fourier-Transformation in L^1
        - Satz von Plancherel (ohne Beweis)
        - Fourier-Transformation in L^2 und ihre Eigenschaften
        - Sobolevraum $H^s(\mathbb{R}^n)$ und seine Definition durch die Fourier-Transformation
    - Sobolev-Einbettungen
        - stetige Einbettung ($\hookrightarrow$), kompakte Einbettung ($\overset{c}{\hookrightarrow}$)
        - $H^m_0(\Omega) \hookrightarrow C^k_0(\overline{\Omega}),\ H^m_{\text{loc}}(\Omega) \subset C^k(\Omega)$ für Ω offen, beschränkt und $m > n/2 + k$
        - $H^k_0(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H^{k-1}_0(\Omega)$ für Ω offen, beschränkt
        - Satz von Rellich $W^k_p(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{k-1}_p(\Omega)$ für Ω offen, beschränkt mit Lipschitz-Rand (ohne Beweis)

Kapitel III - Elliptische Gleichungen

1. **Poisson-Gleichung: Darstellungsformeln**
   - Fundamentallösung (Newtonpotential), Darstellung der klassischen Lösung der Possion-Gl. in $\mathbb{R}^n$ für $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ und der distributionellen Lösung für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$
   - Randwertprobleme, Greensche Funktion
     - Darstellung der Lösung mit Hilfe der Greenschen Funktion: Dirchlet und Neumann-Fall
2. **Energimethoden, schwache Formulierung**
   - Energieminimierer sind distributionelle Lösungen
   - Definition der schwachen Lösung
   - Existenz einer schwachen Lösung
     - Dualraum, Rieszscher Darstellungssatz und seine Anwendung an das Existenzproblem für symmetrische Bilinearformen
     - inhomogene Dirichlet-Randdaten
     - Satz von Lax-Milram für (i.A.) unsymmetrische Bilinearformen
     - Anwendung von Lax-Milgram für das Existenzproblem (inkl. der Gardning-Ungleichung)
     - Fredholm-Alternative für die Frage der eindeutigen Lösbarkeit
   - Neumann-Randdaten
     - Poincaré-Ungleichung ohne die Null-Randdaten-Bedingung
     - Definition der schwachen Lösung
     - Anwendung von Lax-Milgram an das Neumann-Problem
3. **Regularität**
   - Beschränktheit der lokalen $W^{k-1,p}$-Norm des Differenzenquotienten von u gleichmäßig in h impliziert $u \in W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$
   - innere a-priori Abschätzung ($\|u\|_{h^1(V)} \leq c(\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$ (mit $V \subset\subset \Omega$)
   - H^2-Regularität im Inneren
   - globale H^2-Regularität
4. **Maximumprinzipien**
   - schwaches Maxmimumprinzip
   - Eindeutigkeit der klassischen Lösung für das Dirichlet-Problem
   - Hopf-Randpunktlemma
   - starkes Maximumprinzip
   - Eindeutigkeit der klassischen Lösung für das Neumann-Problem

- Maxmimuprinzip im Sobolevraum (mit Hilfe des Lemmas von Stampacchia)

Kapitel IV - Parabolische Gleichungen

1. **Wärmeleitungsgleichung**
   - Fundamentallösung, Darstellung der klassischen Lösung in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ für das homogene und das inhomogene Cauchy-Problem
   - Maximumprinzip in $\mathbb{R}^n$
2. **Maximum-Prinzipien für allgemeine parabolische Probleme**
   - schwaches Max.-Prinzip für $c \equiv 0$ und $c \geq 0$
3. **Bochnerräume**
   - Definition des Bochnerraumes $L^p(0, T; X)$ und der schwachen Lösung des parabolischen Problems
   - Eigenschaften des Bochnerraumes: Satz von Bochner
   - Dualraum zu $L^p(0, T; X)$ (ohne Beweis)
   - $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \partial_t u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \;\Rightarrow\; u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$
4. **Existenz schwacher Lösung**
   - Galerkin-Approximation
   - a-priori-Schranken an die approximative Lösung
   - schwaches Kompaktheit-Prinzip, Konvergenz gegen eine schwache Lösung
   - Eindeutigkeit
   - inhomogene Dirichlet-Randdaten
5. **Regularität**
   - $L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$-Regularität für das Problem mit Zeit-unabhängigen Koeffizienten und mit genügend glatten Daten