Handout: Gaußscher Integralsatz, Greensche Identitäten

Definition. *Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine offene zusammenhängende Menge und es heißt ein C^1-Gebiet (Lipschitz-Gebiet), falls gilt: Zu jedem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ existiert eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x_0 und ein geeignetes Koordinatensystem, so dass $U \cap \partial\Omega$ in diesem Koordinatensystem als Graph einer C^1-Funktion (Lipschitz-Funktion) dargestellt werden kann.*

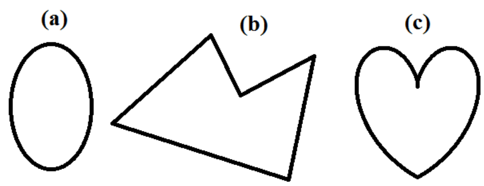

Abbildung 1: Beispiele von beschränkten Gebieten in $\mathbb{R}^2$. (a) ist C^1, (b) ist Lipschitz, während (c) nicht Lipschitz ist wegen dem Kurvenkehrpunkt.

Im Folgenden bedeutet $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\mathcal{L}^n(x)$ und $\mathrm{d}S(x) = \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(x)$, wobei $\mathcal{L}^n$ und $\mathcal{H}^{n-1}$ das $n-$dimensionale Lebesgue-Maß bzw. das $(n-1)$-dimensionale Hausdorff-Maß sind. Oft schreiben wir nur $\mathrm{d}S$ statt $\mathrm{d}S(x)$. $\mathrm{d}S$ wird für Integrale über $(n-1)$-dimensionale Flächen in $\mathbb{R}^n$ benutzt.

Theorem (Gaußscher Integralsatz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und sei ν der äußere Einheitsnormalenvektor (definiert fast überall) an $\partial\Omega$. Dann gilt*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f\nu_i\,\mathrm{d}S$$

für jede Funktion $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Das

Dies ergibt sofort die bekannte Form

$$\int_\Omega \nabla \cdot F\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu\,\mathrm{d}S$$

für Vektorfelder $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, für die $F_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $i = 1, \dots, n$.

Weitere Folgerungen sind die folgende partielle Integration und die Greensche Identitäten.

Theorem (Partielle Integration). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und sei ν der äußere Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega$. Dann gilt für alle $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ und $i = 1, \dots, n$*

$$\int_\Omega v\partial_{x_i}u\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\partial_{x_i}v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} uv\nu_i\,\mathrm{d}S.$$

Theorem (Greensche Identitäten). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und sei ν der äußere Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta u \,\mathrm{d}x &= \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu \,\mathrm{d}S,\\
\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x &= -\int_\Omega u\Delta v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\nabla v \cdot \nu \,\mathrm{d}S,\\
\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \,\mathrm{d}x &= \int_{\partial\Omega} (u\nabla v - v\nabla u) \cdot \nu \,\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

für alle $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$.