

## Handout: Satz von Lebesgue, Vertauschung von Grenzübergängen

**Theorem 0.1. (majorisierte Konvergenz - Satz von Lebesgue)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  messbar und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge (Lebesgue-)messbarer Funktionen mit  $f_n : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ . Falls  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) für fast alle  $x \in \Omega$ , und es existiert ein  $g \in L^1(\Omega, [0, \infty))$ , sodass  $|f_n(x)| < g(x)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und fast alle  $x \in \Omega$ , dann ist  $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

Dies impliziert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx$ .

**Theorem 0.2. (Stetigkeit einer Integralfamilie)** Seien  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$  und  $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$  messbar und  $u : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  erfülle folgende drei Bedingungen

- (i) die Funktion  $y \mapsto u(x, y)$  ist für alle  $x \in \Omega_1$  messbar,
- (ii) die Funktion  $x \mapsto u(x, y)$  ist für fast alle  $y \in \Omega_2$  stetig,
- (iii)  $u$  hat eine (in  $x$ ) gleichmäßige  $L^1$ -majorante, d.h. es gibt ein  $g \in L^1(\Omega_2)$  mit  $|u(x, y)| \leq g(y)$  für alle  $x \in \Omega_1$  und fast alle  $y \in \Omega_2$ .

Dann ist  $u(x, \cdot) \in L^1(\Omega_2)$  für alle  $x \in \Omega_1$  und  $v : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_{\Omega_2} u(x, y) dy$  ist stetig auf  $\Omega_1$ .

*Beweis.* Wähle  $x \in \Omega_1$  und eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega$  mit  $x_k \rightarrow x$ . Setze  $u_k(y) := u(x_k, y)$ . Es gilt  $u_k(y) \rightarrow u(x, y)$  für fast alle  $y \in \Omega_2$  und  $|u_k(y)| \leq g(y)$  für alle  $k$  und fast alle  $y \in \Omega_2$ . Dann folgt aus Theorem 0.1, dass  $u(x, \cdot) \in L^1(\Omega_2)$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_2} u_k(y) dy = \int_{\Omega_2} u(x, y) dy$ .  $\square$

**Theorem 0.3. (Ableitung einer Integralfamilie)** Sei  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$  messbar und  $u : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei für alle  $x \in \Omega_1$  und fast alle  $y \in \Omega_2$  nach  $x_i$  partiell differenzierbar. Falls  $u, \partial_{x_i} u : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Bedingungen (i)-(iii) aus Theorem 0.2 erfüllen, dann ist  $v : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_{\Omega_2} u(x, y) dy$  nach  $x_i$  stetig partiell differenzierbar in  $\Omega_1$  und

$$\partial_{x_i} v(x) = \int_{\Omega_2} \partial_{x_i} u(x, y) dy.$$

*Beweis.* Für eine beliebige reelle Nullfolge  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gibt es nach dem Mittelwertsatz eine Folge  $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $|\delta_k| \leq |h_k|$  (und  $\delta_k$  abhängig von  $x, y$ ), sodass

$$\psi_k(x, y) := \frac{u(x + h_k e_i, y) - u(x, y)}{h_k} = \partial_{x_i} u(x + \delta_k e_i, y).$$

Nach den Voraussetzungen gibt es dann  $g \in L^1(\Omega_2)$ , sodass  $\psi_k(x, y) \leq g(y)$  für alle  $x \in \Omega_1$  und fast alle  $y \in \Omega_2$  und es gilt  $\psi_k(x, y) \rightarrow \partial_{x_i} u(x, y)$  für alle  $x \in \Omega_1$  und fast alle  $y \in \Omega_2$ . Der Satz von Lebesgue liefert dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{v(x + h_k e_i) - v(x)}{h_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_2} \psi_k(x, y) dy = \int_{\Omega_2} \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k(x, y) dy = \int_{\Omega_2} \partial_{x_i} u(x, y) dy$$

für alle  $x \in \Omega_1$ . Die Stetigkeit von  $\int_{\Omega_2} \partial_{x_i} u(x, y) dy$  folgt aus Satz 0.2 angewandt an  $\partial_{x_i} u$ .  $\square$