Institut für Analysis — Tomáš Dohnal
Technische Universität Dortmund — tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de

Übungsblatt 10

wird besprochen am: 1.2.2013

Problem 1:

Betrachte

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = \varepsilon u^2 \tag{0.1}$$

$$u(0) = 2, \quad \frac{du}{dt}(0) = 0. \tag{0.2}$$

(a) Berechne die asymptotische Approximation mit Hilfe der regulären Störungsrechnung. Bei welcher Ordnung kommt Resonanz?

(b) Wähle die richtige langsame Zeit-Skala um die Resonanz zu vermeiden und berechen eine asymptotische Approximation mit Hilfe der Multiskala-Methode.

Problem 2: Beweise folgende Variante des Satzes 3.10 aus der Vorlesung. Teile des Bewieses, die identisch zu den im Satz 3.10 sind, müssen nicht wiederholt werden.

Theorem 0.1 *Sei $f \in C^2$ und $T > 0$. Es existieren $\varepsilon_0, c > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ gilt für die Lösung x der periodischen Standardform*

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon) \tag{0.3}$$

$$x(0) = \alpha \in \mathbb{R}^n \tag{0.4}$$

und die Lösung x_0 von

$$\frac{\partial x_0}{\partial t_1} = a_0(t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0(t_1), t_0, 0)dt_0 \tag{0.5}$$

$$x_0(0) = \alpha \tag{0.6}$$

die Abschätzung

$$\|x(t, \varepsilon) - x_0(\varepsilon t)\| < c\varepsilon \quad \forall t \in [0, T/\varepsilon].$$

Problem 3: Betrachte das folgende Anfangswertproblem zur nichtlinearen Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} + u + \varepsilon u^3 = 0 \tag{0.7}$$

$$x(x, 0) = \sin(kx), u_t(x, 0) = \sqrt{1 + k^2}\cos(kx). \tag{0.8}$$

Mit Hilfe der Multiskala-Methode berechne die asymptotische Approximation von $u(x, t)$ bis zu einem Fehler von (formal) $O(\varepsilon)$.

Hinweis: Da die Anfangsbedingung nur eine $x-$Skala hat, braucht man auch für alle Zeiten keine andere $x-$Skala.

Problem 4: (Präzession eines Planetes) Die Gleichung für die Umlaufbahn eines Planetes um die Sonne ist

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = k(1 + \varepsilon u^2),$$

wobei $u = 1/r$ und (r, θ) Polarkoordinaten sind. k ist eine Konstante und $\varepsilon \ll 1$ ist die relativistische Korrektur der Newton-Theorie.

Mit Hilfe der Multiskala-Analysis löse das Problem bis zur ersten Ordnung in ε (d.h. berechne u_0) mit den Anfangsdaten $u(0) = k(1 + e), du/d\theta(0) = 0$, wobei e die Excentrizität ist. Zeige, dass

$$u_0(\theta) = kr\cos(\theta(1 - \varepsilon k^2)) + k.$$

Wie gross ist die Präzession des Planetes in einem Jahr? Die Präzession von Merkur war ein bedeutender Test der allgemeinen Relativitätstheorie.