Institut für Analysis — Tomáš Dohnal
Technische Universität Dortmund — tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de


# Übungsblatt 2

wird besprochen am: 26.10.2012

**Problem 1:** Sei $N \in \mathbb{N}_0$ oder $N = \infty$. Angenommen $f(x) \sim \sum_{n=0}^N a_n\phi_n(x)$ und $g(x) \sim \sum_{n=0}^N b_n\phi_n(x)$ für $x \to x_0$, zeige, dass

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \sim \sum_{n=0}^N (\alpha a_n + \beta b_n)\phi_n(x) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

**Problem 2:** Betrachte

$$f(z) := \sinh z^2$$

für $z \in \mathbb{C}$. Im welchen Bereich $A \subset \mathbb{C}$ ist $f(z) \sim e^{z^2}/2$ für $z \to \infty$ und im welchen Bereich ist $f(z) \sim e^{-z^2}/2$ für $z \to \infty$?

**Problem 3:** Mit Hilfe der partiellen Integration oder Integration einer Entwicklung im Integrand berechne die asymptotische Entwicklung von

$$I(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt}dt \quad \text{für} \quad x \to 0+\,.$$

Werte (numerisch) die Entwicklung zu $N$ Termen für $N = 3, 4, 5, ..., 26$ in $x = 0.1$ aus und beschreibe die Resultate.

Zum Vergleich integriere $I(0.1)$ numerisch z.B. mit Hilfe der Trapezregel.

**Problem 4:** Betrachte $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$. Voraussetzung:

$$f(t,x) \sim \sum_{n=0}^\infty f_n(t)\phi_n(x) \quad \text{für} \;\; x \to x_0$$

gleichmässig in $t$, d.h. für jedes $N \in \mathbb{N}_0$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ unabhängig von $t$, so dass $|f(t,x) - \sum_{n=0}^N f_n(t)\phi_n(x)| < \varepsilon|\phi_N(x)|$ für alle $t$, falls $|x - x_0| < \delta$.

Beweise, dass

$$\int_a^b f(t,x)dt \sim \sum_{n=0}^\infty \phi_n(x)\int_a^b f_n(t)dt \quad \text{für} \;\; x \to x_0.$$

**Problem 5:** (Gliedweise Integration von asymptotischen Potenzreihen)

Sei $N \in \mathbb{N}_0$ oder $N = \infty$. Zeige, dass falls $f$ in der Nähe von $x_0$ integrierbar ist, dann kann die asymptotische Entwicklung

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^N a_n(x-x_0)^n \quad \text{für } x \to x_0$$

gliedweise integriert werden, so dass

$$\int_{x_0}^x f(s)ds \sim \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} \quad \text{für } x \to x_0.$$