Institut für Analysis — Tomáš Dohnal
Technische Universität Dortmund — tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de

Übungsblatt 4

wird besprochen am: 16.11.2012

Problem 1: Berechne eine 3-Term Asymptotik von $I(x) = \int_0^\infty e^{-x\sinh(t)}t^2dt$ für $x \to \infty$. Darf ich für die Nebenrechnungen Maple oder Mathematica vorschlagen?

Problem 2: Zeige, dass

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \sim x^x e^{-x}\sqrt{2\pi/x} \quad (x \to \infty).$$

Problem 3: (Satz der stationären Phase für stationären Punkt im rechten Endpunkt.) Mache den Beweis von unserem Satz 3.9 nach und beweise folgendes Resultat:

Sei $a, b \in \mathbb{R}, f \in C^1([a,b]), h \in C^N([a,b]), f(b) \neq 0,\ h'(b) = \cdots = h^{(N-1)}(b) = 0, h^{(N)}(b) \neq 0$, $N \geq 2$, $h'(t) \neq 0$ für alle $t \in (a,b]$. Dann ist

$$\int_a^b e^{\mathrm{i}xh(t)}f(t)dt = \frac{1}{N}\Gamma(\tfrac{1}{N})f(b)e^{\mathrm{i}xh(b)}\left(\frac{(-1)^N N!\mathrm{i}}{xh^{(N)}(b)}\right)^{1/N} + O(1/x) \quad (x \to \infty).$$

Problem 4: Betrachte die lineare Korteweg-de-Vries-Gleichung

$$u_t + cu_x + \mu u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

mit $c, \mu > 0$ und den (glatten) Anfangsdaten $u(x,0) = u_0(x)$.

Berechne die Asymptotik von $u(x,t)$ für $x = ct$ und $t \to \infty$. Man sieht, dass im Vergleich zu $u(x,t)$ mit $x = vt, v < c$ und $t \to \infty$ die Amplitude langsamer abfällt. Wie schnell?

Problem 5: Berechne die 1-Term Asymptotik der Bessel-Funktion erster Gattung

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)dt \quad (x \to \infty)$$

mit $n \in \mathbb{N}$ fest.