Institut für Analysis — Tomáš Dohnal
Technische Universität Dortmund — tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de

Übungsblatt 5

wird besprochen am: 23.11.2012

Problem 1: Beweise den folgenden Resultat, der im Problem 2 benutzt wird.

Falls $f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^N)$ für $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ und falls $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m}$ =Konst. mit einem $m \in \mathbb{N}_0$, dann für $\alpha \geq 1 - N/m$ gilt

$$(f(x))^\alpha = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n\right)^\alpha + o\left((x-x_0)^{N+(\alpha-1)m}\right).$$

Problem 2: Zeige mit Hilfe der Methode von steepest descent, dass

$$\int_0^1 t^{-1/2} e^{\mathrm{i}x(t+t^2)} dt \sim e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{\mathrm{i}}{3}\frac{e^{2\mathrm{i}x}}{x} - 3\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}} \text{ für } x \to \infty.$$

Hinweise: 1. Der Sattelpunkt von $h(z) = \mathrm{i}(z+z^2)$ ist nicht brauchbar, weil der deformierte Integrationspfad durch das branch-cut laufen müsste.

2. Für die Integration entlang des Pfades des steilsten Abstiegs durch $z = 0$ wird Watson-Lemma benutzt. Für die asymptotische Entwicklung der Funktion f im Watson-Lemma kann man hier nicht direkt die Taylor-Entwicklung benutzen. (Warum?) Statt dem sollte man den Satz aus Problem 1 nutzen.

Problem 3: Betrachte $I(x) := \int_0^\infty \cos(x(\frac{t^3}{3} - t))dt$.

Benutze eine Deformation des Integrationspfades und die steepest-descent-Methode um zu zeigen, dass

$$I(x) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{2}(\cos(\tfrac{2}{3}x) + \sin(\tfrac{2}{3}x))x^{-1/2} - \frac{5\sqrt{2\pi}}{96}(\cos(\tfrac{2}{3}x) - \sin(\tfrac{2}{3}x))x^{-3/2} \text{ für } x \to \infty.$$

Hinweis: Der deformierte Pfad sollte durch den Sattelpunkt in $z = 1$ führen. Auf diesem Pfad wird man, wie üblich, die Laplace-Methode benutzen. Dafür macht man eine passende Tranformation der Variablen, so dass man ein Integral der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2 x} * \text{etwas } ds$$

hat. In der Transformation von der z-Variable zur s-Variable wird es schwierig sein die Funktion $z(s)$ explicit hin zu schreiben. Man kann sie aber asymptotisch bestimmen in der Nähe von $s = 0$ (Nähe des Sattelpunktes) in dem man den Ansatz

$$z(s) \sim a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 \qquad (s \to 0)$$

macht und die a_j bestimmt.