Übungsblatt 8

Abgabe am 3.2.2015 wird besprochen am: 5.2.2015

Problem 1: Betrachte das folgende Anfangswertproblem zur nichtlinearen Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} + u + \varepsilon u^3 = 0 \tag{0.1}$$

$$u(x,0) = \sin(kx), u_t(x,0) = \sqrt{1+k^2}\cos(kx), k \in \mathbb{Z}. \tag{0.2}$$

Berechne mit Hilfe der Multiskalen-Methode die asymptotische Approximation von $u(x,t)$ bis zu einem Fehler von (formal) $O(\varepsilon)$.

Hinweise:

1. Da die Anfangsbedingung nur eine $x-$Skala hat, braucht man auch für alle Zeiten keine andere $x-$Skala.
2. Bei der Rechnung für die Terme der Ordnung $O(1)$ sollte benutzt werden, dass u 2π-periodisch in x ist, ebenso die Anfangsdaten, so dass man die Fourierreihe

   $$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}_n(t)e^{inx}, \quad \hat{u}_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,t)e^{-inx}dx$$

   nutzen kann.

Problem 2: (Präzession eines Planetes)

Die Gleichung für die Umlaufbahn eines Planetes um die Sonne ist

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = k(1+\varepsilon u^2),$$

wobei $u = 1/r$ und (r,θ) Polarkoordinaten sind. Dabei ist k eine Konstante und $\varepsilon \ll 1$ ist die relativistische Korrektur der Newton-Theorie. Löse mit Hilfe der Multiskalen-Analysis das Problem bis zur ersten Ordnung in ε (d.h. berechne u_0) mit den Anfangsdaten $u(0) = k(1+e)$, $\frac{du}{d\theta}(0) = 0$, wobei e die Excentrizität ist. Zeige, dass

$$u_0(\theta) = ke\cos(\theta(1-\varepsilon k^2)) + k.$$

Wie gross ist die Präzession des Planetes in einem Jahr?

Bemerkung: Die Präzession von Merkur war ein bedeutender Test der allgemeinen Relativitätstheorie.

Problem 3: (Fehlerabschätzung für die Multiskala-Methode: Zum Satz 4.9)

In den Fällen, wo $\int_0^{2\pi} f(y,t,0)dt = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$, entsteht in der Multiskala-Rechnung keine Resonanz im $O(\varepsilon)$-Schritt und die Skala $t_1 = \varepsilon t$ in u_0 wird an der Stelle nicht gebraucht. Oft kann man dann anstatt die $\varepsilon^2 t$-Skala verwenden.

Beweisen Sie die folgende spezielle Alternative zum Satz 4.9.

Theorem 0.1 *Betrachte erstens das Problem* $\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(\varepsilon x, t), x(0) = \alpha \in \mathbb{R}^n$ *mit* $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, *wobei* f 2π*-periodisch in* t *ist und* $\int_0^{2\pi} f(y,t)dt = 0$ *für alle* $y \in \mathbb{R}^n$. *Zweitens betrachte das Problem* $\frac{dx_0}{d\tau} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial y}(0,t)dt\ x_0(\tau), x_0(0) = \alpha$.

Sei $\varepsilon_0 > 0$ *und* $\|.\|$ *eine Norm in* $\mathbb{R}^n$. *Es existieren* $T, c > 0$, *so dass*

$$\|x(t;\varepsilon) - x_0(\varepsilon^2 t)\| < c\varepsilon \quad \text{für alle } t \in [0, T\varepsilon^{-2}] \text{ und alle } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Hinweis:

- Der Beweis kann analog zu dem vom Satz 4.9. verlaufen. In der Integralgleichung für den Fehler R wird aber die Dreiecksungleichung mit anderen Termen gemacht.