INSTITUT FÜR MATHEMATIK
MLU HALLE-WITTENBERG — TOMÁŠ DOHNAL
DISPERSIVE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN — SOSE 2018

Blatt 4

wird besprochen am 31.5.2018

Problem 1: (Distributionelle Lösung der Schrödinger-Gleichung)
Zeigen Sie, dass für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ die $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n))$-Funktion $u(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}k\cdot x} e^{-\mathrm{i}|k|^2 t} \hat{f}(k) dk$ eine distributionelle Lösung der Schrödinger-Gleichung $\mathrm{i}\partial_t u + \Delta u = 0$ ist und $\|u(\cdot,0) - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$.
Hinweis: Es definiert u eine temperierte Distribution $u \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$. Es heißt $u \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$ eine distributionelle Lösung, falls $-\mathrm{i}u(\partial_t \phi) + u(\Delta\phi) = 0$ für alle $\phi \in S(\mathbb{R}^{n+1})$.

Problem 2: (Eigenschaften der Schrödinger-Gruppe)
Weisen Sie folgende Eigenschaften von $e^{\mathrm{i}t\Delta} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ nach:

(a) $\|e^{\mathrm{i}t\Delta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

(b) $e^{\mathrm{i}t\Delta} e^{\mathrm{i}s\Delta} = e^{\mathrm{i}(t+s)\Delta} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

(c) $e^{\mathrm{i}0\Delta} = \mathrm{Id}$

(d) Für ein festes $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist die Abbildung $\Phi_f : \mathbb{R} \to L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\Phi_f : t \mapsto \Phi_f(t) = e^{\mathrm{i}t\Delta} f$ stetig. Die Stetigkeit gilt also bezüglich der $L^2(\mathbb{R}^n)$-Norm.

Bemerkung: Im Allgemeinen (für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$) ist hier $e^{\mathrm{i}t\Delta} f$ nur eine distributionelle Lösung.

Problem 3:

(a) Zeigen Sie, dass falls $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\rho f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, wobei $\rho(x) = 1 + |x|^2$, so ist

$$\lim_{t \to \pm\infty} \left\| e^{\mathrm{i}t\Delta} f - (2\mathrm{i}t)^{-n/2} e^{\mathrm{i}\frac{|\cdot|^2}{4t}} \hat{f}\left(\frac{\cdot}{2t}\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{0.1}$$

Hinweis: Zeigen Sie erst die Abschätzung $|e^{\mathrm{i}\frac{|x|^2}{4t}} - 1| \leq c\frac{|x|^2}{|4t|}$.

(b) Zeigen Sie, dass (0.1) auch für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für alle $h \in S$ gilt $\|e^{-\mathrm{i}t\Delta} h - U^* h\|_{L^2} \to 0$ für $|t| \to \infty$, wobei $U*$ der adjungierte Operator zu $U : L^2 \to L^2$ mit $U : f \mapsto Uf = (2\mathrm{i}t)^{-n/2} e^{\mathrm{i}\frac{|\cdot|^2}{4t}} \hat{f}\left(\frac{\cdot}{2t}\right)$ ist.
Benutzen Sie danach die Dichtheit von S in L^2.

Problem 4: Spielen Sie mit dem *neuen* Matlab-Program für die lineare Schrödinger-Gleichung, cf. Stud-IP bzw. die Homepage. Modifizieren Sie dies um die dominanten Wellenzahlen der Lösung der linearen KdV-Gleichung $u_t + u_{xxx} = 0$ entlang des Strahles $x = vt$ zu untersuchen.