Blatt 5

Abgabe: 14.06.2018

Problem 1: (Wellenpakete)

(a) Zeigen Sie, dass für kleine $|\varepsilon| \ll 1$, $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *beliebig* und $k_0 \in \mathbb{R}^n$

$$v(x,t) = e^{\mathrm{i}(k_0\cdot x - |k_0|^2 t)}\phi\big(\varepsilon(x-2k_0t)\big)$$

eine approximative Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\partial_t u = -\Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ist, in dem Sinne, dass

$$\mathrm{i}\partial_t v(x,t) + \Delta v(x,t) = O(\varepsilon^2) \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

(b) Betrachten Sie eine skalare Gleichung

$$\partial_t u = P(\nabla)u, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit einem Polynom $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Angenommen, die zugehörige Dispersionsrelation $\omega = W(k)$ ist für reelle Wellenzahlen reell. Zeigen Sie dann, dass

$$v(x,t) = e^{\mathrm{i}(k_0\cdot x - W(k_0)t)}\phi(\varepsilon(x-\nabla W(k_0)t))$$

eine approximative Lösung für beliebige $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $k_0 \in \mathbb{R}^n$ ist, d.h.

$$\partial_t v(x,t) - P(\nabla)v(x,t) = O(\varepsilon^2) \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Hinweis: Leibniz-Formel.

Problem 2: (Bloch-Eigenwertproblem)

(a) Formulieren Sie für die drei folgenden Gleichungen das (räumliche) Bloch-Eigenwertproblem.

$$\mathrm{i}\partial_t u + \partial_x^2 u - V(x)u = 0, \quad x,t \in \mathbb{R}, V(x+2\pi) = V(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \tag{0.1}$$

$$\mathrm{i}\partial_t u + \Delta u - V(x)u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, V(x+2\pi e_j) = V(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n, j \in \{1,\dots,n\} \tag{0.2}$$

$$\alpha(x)\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \alpha(x+2\pi) = \alpha(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \tag{0.3}$$

wobei e_j der $j-$te euklidische Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$ ist und die Funktionen V und α reellwertig sind. Für die weiteren Aufgaben heißen die Eigenwerte des Bloch-Eigenwertproblems $\omega_j, j \in \mathbb{N}$ (oder $\mathbb{Z}$) wobei $\omega_j : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ und für jedes $k \in \mathbb{B} := (-1/2, 1/2]^n$ die Enumerierung von $(\omega_j(k))_j$ so gewählt wird, dass $\omega_j(k) \le \omega_{j+1}(k) \le \dots$ für allle j.

(b) Drücken Sie durch die $k-$Differenzierung der Eigenwertgleichung für (0.2) und (0.3) die Gruppengeschwindigkeit $\nabla\omega_n(k)$ mit Hilfe von Integralen der Eigenfunktion und ihrer $x-$Ableitungen (aber nicht ihrer $k-$Ableitungen) aus.

(c) Zeigen Sie, dass in allen drei Fällen die Eigenwerte $\omega_n(k)$ (d.h. die Bandstruktur) punktsymmetrisch um $k=0$ sind, d.h. $\omega_n(-k)=\omega_n(k)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $k\in(-1/2,1/2)^n$.

(d) Zeigen Sie, dass für (0.1) die Eigenwertfunktionen $k\mapsto\omega_n(k)$ streng monoton auf $[0,1/2]$ (und wegen (c) auch auf $[-1/2,0]$) sind.
Hinweis: Das Eigenwertproblem ist eine gewöhnliche DGL zweiter Ordnung. Nutzen Sie eine Eigenschaft von DGL's zweiter Ordnung aus.

Problem 3: (Bloch-Transformation) Betrachten Sie für ein $L>0$ die Bloch-Transformation in einer Dimension

$$\mathcal{T}(f)(x,k) := \tilde{f}(x,k) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(k+m\tfrac{2\pi}{L}\right) e^{\mathrm{i}m\frac{2\pi}{L}x}$$

und die Abbildung

$$\mathcal{T}_1\tilde{f}(x) := (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{B}} e^{\mathrm{i}kx}\tilde{f}(x,k)dk, \tag{0.4}$$

wobei $\mathbb{B}:=(-\pi/L,\pi/L]$. Zeigen Sie, dass für $u\in S(\mathbb{R})$ ist $\mathcal{T}_1\mathcal{T}u=u$ und für $\tilde{u}\in C^\infty_{bp}(\mathbb{B},H^s(0,L))$ mit $s\in\mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{T}\mathcal{T}_1\tilde{u}=\tilde{u}$.

Hier ist $f\mapsto\widehat{f}$ die Fourier-Transformation und

$$\begin{aligned} C^\infty_{bp}(\mathbb{B},H^s(0,L)) := \Big\{ & u:\mathbb{B}\to H^s(0,L), k\mapsto u(\cdot,k) : \exists v\in C^\infty(\mathbb{R},H^s(0,L)) \\ & \text{with } v\left(x,k+\tfrac{2\pi}{L}\right) = e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{L}x} v(x,k), u = v|_{k\in\mathbb{B}} \Big\}. \end{aligned}$$