

Blatt 7

wird besprochen am: 12.07.2018

**Problem 1:** (NLS: Erhaltungsgrößen und Blow-up) Betrachten Sie die NLS

$$\begin{aligned}i\partial_t u + \Delta u + |u|^{2\sigma} u &= 0, x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x)\end{aligned}$$

mit  $\sigma > 0$ .

- (a) Zeigen Sie, dass unter passenden Bedingungen für das asymptotische Verhalten von  $u$  für  $|x| \rightarrow \infty$  die Größen  $N(u) := \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$  und  $H(u) := \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 - \frac{1}{\sigma+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2\sigma+2} dx$  Erhaltungsgrößen der NLS sind.
- (b) Betrachten sie die Varianz  $V(t) := \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |u|^2 dx$ . Zeigen Sie, dass falls  $n\sigma \geq 2$  und  $H(u_0) < 0$ , dann gibt es einen Zeitpunkt  $t_* \in (0, \infty)$ , sodass  $\lim_{t \rightarrow t_*+} \|u(t)\|_{L^\infty} = \infty$ .

*Hinweis für (b): Es gilt die Varianz-Identität  $V'' = 8H - 4\frac{n\sigma-2}{\sigma+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2\sigma+2} dx$ . Integrieren Sie diese Gleichung um zu zeigen, dass für  $n\sigma \geq 2$  gilt  $V(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow t_*$  für ein  $t_* \in (0, \infty)$ . Als nächstes nutzen (und beweisen) Sie die Ungleichung  $\|f\|_{L^2}^2 \leq \frac{2}{d} \|\nabla f\|_{L^2} \|xf\|_{L^2}$  um zu zeigen, dass  $\|\nabla u(t)\|_{L^2} \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow t_*$ . Anschliessend verwendet man (a).*

**Problem 2:** (Bloch-Wellen und Wellenpakete) Betrachten Sie die lineare Schrödinger-Gleichung

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u - \cos^2(x/2)u = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Berechnen Sie numerisch (z.B. finite Differenzen 2. Ordnung) den ersten Eigenwert  $\omega_1(k)$  und die Eigenfunktion  $p_1(x, k)$  vom zugehörigen Bloch-Eigenwert-Problem

$$\omega p = -(\partial_x + ik)^2 p + \cos^2(x/2)p, x \in [0, 2\pi); \quad p(2\pi) = p(0)$$

für alle  $k$  in einer Diskretisierung der halben Brillouin-Zone  $[0, 1/2]$ .

Plotten Sie den Graphen  $(k, \omega_1(k)), k \in [0, 1/2]$ .

Wählen Sie dann ein  $k_0 \in (0, 1/2)$  und zeigen Sie numerisch, dass sich ein Wellenpaket mit der Trägerwelle  $p_1(x, k_0)e^{i(k_0 x - \omega_1(k_0)t)}$  mit der Geschwindigkeit  $v_g(k_0) = \omega_1'(k_0)$  bewegt. Man wählt dafür Anfangsdaten  $u(x, 0)$  als das Produkt der Bloch-Welle zur Zeit  $t = 0$  und einer breiten Einhüllenden. Für die numerische Lösung der Schrödinger-Gleichung verwenden Sie das Programm `lin_schrod.m` auf `studIP`.

**Problem 3:** (Herleitung der Coupled-Mode-Gleichungen)

Betrachten Sie die nichtlineare Wellengleichung mit einer kleinen periodischen Struktur:

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \varepsilon \cos(2k_0 x)u + u^3 = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}, k_0 \in \mathbb{R} \tag{0.1}$$

mit  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

(a) Zeigen Sie, dass für den Ansatz

$$u_{\text{app}}(x, t) = \sqrt{\varepsilon} \left( A_+(\varepsilon x, \varepsilon t) e^{ik_0(x-t)} + A_-(\varepsilon x, \varepsilon t) e^{-ik_0(x+t)} \right) + \text{c.c.} \quad (0.2)$$

die Terme im Residuum  $\partial_t^2 u_{\text{app}} - \partial_x^2 u_{\text{app}} + \varepsilon \cos(2k_0 x) u_{\text{app}} + u_{\text{app}}^3$ , die proportional zu  $e^{ik_0(x-t)}$  oder zu  $e^{-ik_0(x+t)}$  (oder zu den komplex konjugierten Funktionen  $e^{-ik_0(x-t)}, e^{ik_0(x+t)}$ ) sind, formal der Ordnung  $O(\varepsilon^{5/2})$  sind, falls die Einhüllenden  $A_+(X, T), A_-(X, T)$  die Coupled-Mode-Gleichungen (CME)

$$\begin{aligned} i(\partial_T A_+ + \partial_X A_+) + \kappa A_- + \Gamma(|A_+|^2 + 2|A_-|^2) A_+ &= 0 \\ i(\partial_T A_- - \partial_X A_-) + \kappa A_+ + \Gamma(|A_-|^2 + 2|A_+|^2) A_- &= 0 \end{aligned}$$

mit geeigneten  $\kappa, \Gamma \in \mathbb{R}$  erfüllen.

(b) Hier wird die Herleitung in Fourier-Variablen gemacht. Fourier-transformieren Sie also erst die Gleichung (0.1) sowie den Ansatz (0.2).

Angenommen  $\text{supp}(\hat{A}_\pm(\cdot, T)) \subset [-L, L]$  für ein  $L > 0$ , zeigen Sie, dass das Residuum in Fourier-Variablen nur in  $\varepsilon$ -Umgebungen von  $k = \pm k_0$  und  $k = \pm 3k_0$  Träger hat. Zeigen Sie, dass falls  $(A_+, A_-)$  die CME erfüllt (und  $\text{supp}(\hat{A}_\pm(\cdot, T)) \subset [-L, L]$ ), dann ist das Residuum auf den Umgebungen der Punkte  $k = \pm k_0$  der formalen Ordnung  $\varepsilon^{3/2}$ . Beweisen Sie dann, dass in der  $L^1$ -Norm (in Fourier-Variablen) über diese Umgebungen das Residuum aber wieder  $O(\varepsilon^{5/2})$  ist. Deswegen ist auch die Supremum-Norm der inversen Fourier-Transformation dieser Residuum-Teile  $O(\varepsilon^{5/2})$ .

(c) Wie kann man den Ansatz in den Fourier-Variablen erweitern, sodass das Residuum auch auf den Umgebungen der Punkte  $k = \pm 3k_0$  klein ist?

**Problem 4:** Betrachten Sie für die lineare Boussinesq-Gleichung

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - \partial_x^4 u, \quad x \in \mathbb{R} \quad (0.3)$$

langsam modulierte Wellenpaketlösungen

$$u(x, t) \sim A(X, T) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + \text{c.c.} =: u_{as}(x, t)$$

mit  $X = \varepsilon(x - v_g t), T = \varepsilon^2 t, 0 < \varepsilon \ll 1$  und mit  $k_0, \omega_0, v_g = \omega'(k_0) \in \mathbb{R}$  verbunden durch die Dispersionsrelation.

(a) Leiten Sie formal die lineare Schrödingergleichung für  $A$  her:

$$i\partial_T A + \frac{1}{2}\omega''(k_0)\partial_X^2 A = 0. \quad (0.4)$$

(b) Schreiben Sie die partielle Differentialgleichung für den Fehler  $R := u - u_{as}$  aus (a).

- (c) Beweisen Sie, dass falls  $A$  eine Lösung von (0.4) ist, so dass  $\partial_T^p \partial_X^q A \in C([0, T_0], H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$  mit  $T_0 > 0$  für alle  $p, q \in \mathbb{N}_0, p \leq 2, q \leq 4$ , und falls  $u$  die Lösung von (0.3) mit

$$u(x, 0) = u_{as}(x, 0), \quad \partial_t u(x, 0) = \partial_t u_{as}(x, 0)$$

ist, dann gibt es ein  $C > 0$ , so dass für beliebige  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\|\partial_t R(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_x R(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^{1/4} \quad \text{für alle } t \in [0, T_0\varepsilon^{-2}].$$

Das Vorgehen dabei ist analog zur Vorlesung.