

Blatt 1

wird besprochen am 30.10.2015

Problem 1: Zeige, dass die Energie $\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t u)^2 + c^2 |\nabla u|^2 dx$ eine Erhaltungsgröße für klassische $C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ -Lösungen der Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0$ in \mathbb{R}^n mit Anfangsdaten mit kompaktem Träger ist.

Problem 2: Beweise folgenden einfachen Teil des Satzes von Paley-Wiener. Falls $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\text{supp } f \subset \Omega$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist, dann ist $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik \cdot x} dx$ holomorph auf \mathbb{C}^n . Hinweis: Zeige mit Hilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz, dass die Differenzierung unter dem Integral erlaubt ist und zeige, dass $\partial_{k_m}^m \hat{f} = 0$ für alle $m = 1, \dots, n$.

Problem 3:

- (i) Zeige für die Funktion $\hat{W}(k) = \frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}$ mit $k \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R}$, dass ihre inverse Fourier-Transformation die Distribution W ist, welche definiert ist durch

$$W(\psi) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x|=ct} \psi(x) dx \quad \forall \psi \in S(\mathbb{R}^3).$$

Hinweis: Verwende die Identität $\int_{|x|=ct} e^{-ik \cdot x} dx = 4\pi c^2 t \frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}$ in \mathbb{R}^3 (und rechne sie nach!). Verwende die Definition der Fourier-Transformation für Distributionen.

- (ii) Mit dem Resultat aus (i) erhalte aus

$$\hat{u}(k, t) = \frac{\sin(c|k|t)}{c|k|} \hat{g}(k) + \partial_t \left(\frac{\sin(c|k|t)}{c|k|} \hat{f}(k) \right)$$

die Kirchhoffsche Formel

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x-y|=ct} g(y) dy + \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x-y|=ct} f(y) dy \right)$$

für die Lösung der Wellengleichung in 3D mit den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = f(x), \partial_t u(x, 0) = g(x)$. Hinweis: Nutze die Identität

$$\widehat{T\phi} = \widehat{T * \phi} \text{ für alle } \phi \in S(\mathbb{R}^3), T \in S'(\mathbb{R}^3),$$

wobei $(T * \phi)(x) := T(\phi(x - \cdot))$.

Problem 4: Zeige, dass die Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$ invariant unter der Lorentz-Transformation

$$(x, t) \rightarrow \left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) \text{ für beliebige } v \in \mathbb{R} \text{ mit } v^2 < c^2 \text{ ist.}$$

Problem 5: Seien $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, α ein Multiindex. Zeige die folgenden Eigenschaften der Fourier-Transformation aus der Vorlesung:

(i) $(\partial_x^\alpha u)^\wedge = i^{|\alpha|} k^\alpha \hat{u}$

(ii) $(u * v)^\wedge(k) = (2\pi)^{n/2} \hat{u}(k) \hat{v}(k)$.