Tomáš Dohnal
Lisa Helfmeier

Blatt 3

Abgabe: 30.11.2015

Problem 1: Betrachte das System

$$\begin{aligned}&\partial_t u = Q(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})u, \qquad u(x,t) \in \mathbb{C}^m, x \in \mathbb{R}^n, t > 0,\\ &u(\cdot, 0) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

mit einem Polynom $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^{m\times m}, m \in \mathbb{N}$, wobei für alle $k \in \mathbb{R}^n$ die Matrix $Q(\mathrm{i}k_1, \dots, \mathrm{i}k_n)$ diagonalisierbar ist und imaginäre Eigenwerte $-\mathrm{i}W_j(k)$ für $j = 1, \dots, m$ hat.
Zeige, dass die L^2-Norm $\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^m \|u_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ in der Zeit erhalten bleibt.

Problem 2: (zu Problem 3 aus Blatt 2)

(a) Verstehe den Beweis für die Methode der stationären Phase (Satz B.7 im Skript) und schreibe im Detail den Beweis von

$$\int_{a+\delta}^b e^{\mathrm{i}xh(t)} f(t)dt = O(1/x) \text{ für } x \to \infty$$
$$\int_a^{a+\delta} e^{\mathrm{i}xh(t)} f(t)dt = e^{\mathrm{i}xh(a)} f(a) \int_a^\infty F(x,t)dt + O(1/x) \text{ für } x \to \infty$$

(mit der Notation aus dem Skript). Rechtfertige jede Anwendung vom Lemma B.5. Lemma B.5 muss hier nicht bewiesen werden.

(b) Berechne mit Hilfe des Cauchy-Integralsatzes das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\alpha x^3} dx$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$. Wähle für das Integral über $[0,\infty)$ den Pfad in der komplexen Ebene, der aus den Abschnitten $[0,R)$, $[0,R)e^{i\pi/6}$ und dem Kreissegment besteht, welches beide Teile verbindet. Lasse dann R gegen ∞ gehen.

(c) Mit Hilfe vom Satz B.7 bestimme für das Problem

$$\begin{aligned}&\partial_t u = Q(\partial_x)u, \qquad u(x,t) \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}, t > 0\\ &u(\cdot, 0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R})\end{aligned}$$

mit einem Polynom $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Asymptotik niedrigster Ordnung für $t \to \infty, \frac{x}{t} = c \in \mathbb{R}$ unter der Voraussetzung, dass die Dispersionsrelation

$$W''(k) = 0, W'''(k) \neq 0 \quad \text{für alle } k \text{ mit } W'(k) = c$$

erfüllt.

Problem 3: (Ausbreitung eines Wellenpakets durch Dispersion)

Wir betrachten für die Schrödinger-Gleichung ein Wellenpaket, dessen Trägerwelle die Wellenzahl k_0 hat. In dieser Aufgabe wird gezeigt, dass die Einhüllende des Wellenpakets mit der Zeit t durch Dispersion in der Breite wächst.

- Berechne die Lösung $u(x,t)$ der Schrödinger-Gleichung
$$\mathrm{i}\partial_t u = -\partial_x^2 u, \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0$$
mit Anfangsdaten
$$u(x,0) = e^{-\alpha x^2} e^{\mathrm{i}k_0 x},$$
$\alpha > 0, k_0 \in \mathbb{R}$ und bestimme die effektive Breite des Wellenpakets in der Zeit t. Für eine Funktion $f(y)$ mit der Gauß'schen Amplitude $|f(y)| = ce^{-\mu y^2}$ mit $\mu > 0$ ist die effektive Breite gegeben durch $1/\sqrt{\mu}$.
- Zeige, dass sich das Wellenpaket mit der Geschwindigkeit $v_g(k_0) = 2k_0$ bewegt und wie $t^{-1/2}$ abfällt.

Hinweis: Für $J(\kappa) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\kappa y} e^{-ay^2+by}\, dy$ bestimme die DGL erster Ordnung, die J erfüllt und löse sie.

Problem 4: (Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Coupled-Mode Gleichungen)

Schreibe das System der linearen Coupled-Mode Gleichungen
$$\begin{aligned}\mathrm{i}(\partial_t u + \partial_x u) + \kappa v &= 0\\ \mathrm{i}(\partial_t v - \partial_x v) + \kappa u &= 0\end{aligned}$$
für glatte Lösungen mit $\kappa > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}$ um als ein System aus zwei Gleichungen, von denen eine Gleichung die Klein-Gordon Gleichung für u ist. Folgere daraus die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit für die Coupled-Mode Gleichungen.