Blatt 5

Abgabe: 11.01.2016

Problem 1: (Erweiterung zu Problem 5, Blatt 3: Wellenpakete)

(a) Zeige, dass für kleine $|\varepsilon| \ll 1$, $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *beliebig* und $k_0 \in \mathbb{R}^n$

$$v(x,t) = e^{\mathrm{i}(k_0\cdot x - |k_0|^2 t)}\phi\big(\varepsilon(x - 2k_0 t)\big)$$

eine approximative Lösung der Schrödinger Gleichung

$$\mathrm{i}\partial_t u = -\Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ist, in dem Sinne, dass

$$\mathrm{i}\partial_t v + \Delta v = O(\varepsilon^2) \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

(b) Betrachte eine skalare Gleichung

$$\partial_t u = P(\nabla)u, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit einem Polynom $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Angenommen, die zugehörige Dispersionsrelation $\omega = W(k)$ ist für reelle Wellenzahlen reell. Zeige dann, dass

$$v(x,t) = e^{\mathrm{i}(k_0\cdot x - W(k_0)t)}\phi(\varepsilon(x - \nabla W(k_0)t))$$

eine approximative Lösung für beliebige $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $k_0 \in \mathbb{R}^n$ ist, d.h.

$$\partial_t v - P(\nabla)v = O(\varepsilon^2) \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Hinweis: Leibniz-Formel.

Problem 2: Linearisiere das Wasserwellenproblem (ϕ, η klein)

$$\Delta\phi = 0, \qquad -h_0 < x_3 < \eta(x_1,x_2,t) \tag{0.1}$$

$$\partial_{x_3}\phi = 0, \qquad x_3 = -h_0 \tag{0.2}$$

$$\partial_t\phi + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + g\eta = 0, \qquad x_3 = \eta(x_1,x_2,t) \tag{0.3}$$

$$\partial_{x_3}\phi - \partial_t\eta - \partial_{x_1}\phi\partial_{x_1}\eta - \partial_{x_2}\phi\partial_{x_2}\eta = 0, \qquad x_3 = \eta(x_1,x_2,t) \tag{0.4}$$

mit der Notation aus der Vorlesung. Erhalte dadurch

$$\Delta\phi = 0, \qquad -h_0 < x_3 < 0 \tag{0.5}$$

$$\partial_{x_3}\phi = 0, \qquad x_3 = -h_0 \tag{0.6}$$

$$\partial_t\phi + g\eta = 0, \qquad x_3 = 0 \tag{0.7}$$

$$\partial_{x_3}\phi - \partial_t\eta = 0, \qquad x_3 = 0. \tag{0.8}$$

Problem 3: Zeige, dass falls $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, dann

$$\lim_{t\to\pm\infty} \left\| e^{\mathrm{i}t\Delta} f - (2\mathrm{i}t)^{-n/2} e^{\mathrm{i}\frac{|\cdot|^2}{4t}} \hat{f}\left(\tfrac{\cdot}{2t}\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Vorgehen:

- S ist dicht in L^2. Wähle $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S(\mathbb{R}^n)$, so dass $h_n \to e^{it\Delta}f - Uf$ in L^2 für $n \to \infty$ mit $Uf = (2it)^{-n/2} e^{i\frac{|\cdot|^2}{4t}} \hat{f}\left(\frac{\cdot}{2t}\right)$
- Zeige, dass U unitär auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist
- Zeige, dass für alle $h \in S$ gilt $\|e^{-it\Delta}h - U^\star h\|_{L^2} \to 0$ für $|t| \to \infty$
- Folgere daraus $\left(e^{it\Delta}f - Uf, h\right)_{L^2} \to 0$ für $t \to \infty$ für alle $f \in L^2, h \in S$

Problem 4:

(a) Formuliere für die drei folgenden Gleichungen das Bloch-Eigenwertproblem.

$$\mathrm{i}\partial_t u + \partial_x^2 u - V(x)u = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}, V(x+2\pi) = V(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \tag{0.9}$$

$$\mathrm{i}\partial_t u + \Delta u - V(x)u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, V(x+2\pi e_j) = V(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n, j \in \{1, \dots, n\} \tag{0.10}$$

$$\alpha(x)\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \alpha(x+2\pi) = \alpha(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \tag{0.11}$$

wobei e_j der $j-$te euklidische Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$ ist und die Funktionen V und α reellwertig sind.

(b) Drücke durch die $k-$Differenzierung der Eigenwertgleichung für (0.10) und (**??**) die Gruppengeschwindigkeit $\nabla\omega_n(k)$ (zum Eigenwert $\omega_n(k)$) mit Hilfe von Integralen der Eigenfunktion und ihrer $x-$Ableitungen (aber nicht ihrer $k-$Ableitungen) aus.

(c) Zeige, dass in allen drei Fällen die Eigenwerte $\omega_n(k)$ (d.h. die Bandstruktur) punktsymmetrisch um $k = 0$ sind, d.h. $\omega_n(-k) = \omega_n(k)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in (-1/2, 1/2)^n$.

(d) Zeige, dass für (0.9) die Eigenwertfunktionen $k \mapsto \omega_n(k)$ streng monoton auf $[0, 1/2]$ (und wegen (c) auch auf $[-1/2, 0]$) sind.
Hinweis: Das Eigenwertproblem ist eine gewöhnliche DGL zweiter Ordnung. Nutze eine Eigenschaft von DGL's zweiter Ordnung aus.

$\star$ Fröhliche Weihnachten $\star$