Blatt 6

Abgabe: 25.1.2016, Einzelabgabe!

Problem 1: Betrachte folgende Kontinuum-Approximation des FPU-Problems mit einer kleinen Nichtlinearität

$$\partial_\tau^2 y - \partial_x^2 y = \varepsilon(\partial_x y \partial_x^2 y + \kappa \partial_x^4 y), \quad x \in \mathbb{R},\ 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Leite eine KdV-Gleichung als asymptotisches Modell niedrigster Ordnung für rechtswandernde Wellen mit einer langsamen Modulation in der Zeit, d.h. für $y(x,t) \sim \phi(x - t, \varepsilon t)$, her.

Problem 2: Beweise, dass für $V \in C^1(\mathbb{R})$ und $e \in \text{Range}(V)$ die Niveaumenge

$$\{(x_1, x_2) : x_2^2/2 + V(x_1) = e\}$$

eine C^1-Kurve mit Ausnahme kritischer Punkte ist, d.h. Punkte (x_1, x_2) mit $V'(x_1) = 0, x_2 = 0$.

Hinweis: Satz über implizite Funktionen.

Problem 3: Betrachte stehende Lösungen $u(x,t) = e^{-\mathrm{i}\omega t}\phi(x)$ mit reellen ω, ϕ der nichtlinearen Schrödinger Gleichung

$$\mathrm{i}\partial_t u + \partial_x^2 u - \sigma |u|^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Untersuche qualitativ die Art aller solchen Lösungen mit Hilfe der Energie-Integral-Methode (d.h. wie in der Vorlesung Niveaumengen in der Phasenebene skizzieren). Betrachte alle Fälle der Vorzeichen von ω und σ. Wann existiert ein Soliton (mit $\phi^{(n)}(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$ und $n = 0, 1$) und wann eine Frontlösung mit $\phi(x) \to \pm c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für $x \to \pm\infty$?

Problem 4: Linearisiere das Wasserwellenproblem (ϕ, η klein)

$$\Delta\phi = 0, \qquad -h_0 < x_3 < \eta(x_1, x_2, t) \tag{0.1}$$
$$\partial_{x_3}\phi = 0, \qquad x_3 = -h_0 \tag{0.2}$$
$$\partial_t\phi + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + g\eta = 0, \qquad x_3 = \eta(x_1, x_2, t) \tag{0.3}$$
$$\partial_{x_3}\phi - \partial_t\eta - \partial_{x_1}\phi\partial_{x_1}\eta - \partial_{x_2}\phi\partial_{x_2}\eta = 0, \qquad x_3 = \eta(x_1, x_2, t) \tag{0.4}$$

mit der Notation aus der Vorlesung. Erhalte dadurch

$$\Delta\phi = 0, \qquad -h_0 < x_3 < 0 \tag{0.5}$$
$$\partial_{x_3}\phi = 0, \qquad x_3 = -h_0 \tag{0.6}$$
$$\partial_t\phi + g\eta = 0, \qquad x_3 = 0 \tag{0.7}$$
$$\partial_{x_3}\phi - \partial_t\eta = 0, \qquad x_3 = 0. \tag{0.8}$$

Hinweis: Beachte, dass das Streichen der nichtlinearen Terme in System (0.1)-(0.4) nicht ausreicht. Die Gleichung ist aufgrund der von η abhängigen Randbedingungen dann noch immer nichtlinear. Definiere also geeignete $\tilde{x_3}$, $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\eta}$, so dass die gewünschten Randdaten entstehen.

Problem 5: Herleitung der Coupled-Mode-Gleichungen

Betrachte die nichtlineare Wellengleichung mit einer kleinen periodischen Struktur:

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \varepsilon \cos(2k_0 x) u + u^3 = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}, k_0 \in \mathbb{R} \tag{0.9}$$

mit $0 < \varepsilon \ll 1$.

(a) Zeige, dass für den Ansatz

$$u_{\text{app}}(x,t) = \sqrt{\varepsilon}\left(A_+(\varepsilon x, \varepsilon t) e^{\mathrm{i}k_0(x-t)} + A_-(\varepsilon x, \varepsilon t) e^{-\mathrm{i}k_0(x+t)}\right) + \text{c.c.} \tag{0.10}$$

die Terme im Residuum $\partial_t^2 u_{\text{app}} - \partial_x^2 u_{\text{app}} + \varepsilon \cos(2k_0 x) u_{\text{app}} + u_{\text{app}}^3$, die proportional zu $e^{\mathrm{i}k_0(x-t)}$ oder zu $e^{-\mathrm{i}k_0(x+t)}$ (oder zu den komplex konjugierten Funktionen $e^{-\mathrm{i}k_0(x-t)}, e^{\mathrm{i}k_0(x+t)}$) sind, formal der Ordnung $O(\varepsilon^{5/2})$ sind, falls die Einhüllenden $A_+(X,T), A_-(X,T)$ die Coupled-Mode-Gleichungen (CME)

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}(\partial_T A_+ + \partial_X A_+) + \kappa A_- + \Gamma(|A_+|^2 + 2|A_-|^2)A_+ = 0\\
\mathrm{i}(\partial_T A_- - \partial_X A_-) + \kappa A_+ + \Gamma(|A_-|^2 + 2|A_+|^2)A_- = 0
\end{aligned}$$

mit geeigneten $\kappa, \Gamma \in \mathbb{R}$ erfüllen.

(b) Hier wird die Herleitung in Fourier-Variablen gemacht. Fourier-transformiere also erst die Gleichung (0.9) sowie den Ansatz (0.10). Dabei wird folgendes wichtig sein: $\mathcal{F}(B(\varepsilon x)e^{\mathrm{i}k_0 x})(k) = \varepsilon^{-1}\hat{B}\left(\frac{k-k_0}{\varepsilon}\right)$, wobei $\mathcal{F}$ die Fourier-Transformation ist - zeige dies.

Angenommen $\operatorname{supp}(\hat{A}_\pm(\cdot,T)) \subset [-L, L]$ für ein $L > 0$, zeige, dass das Residuum in Fourier-Variablen nur in ε-Umgebungen von $k = \pm k_0$ und $k = \pm 3k_0$ Träger hat. Zeige, dass falls (A_+, A_-) die CME erfüllt (und $\operatorname{supp}(\hat{A}_\pm(\cdot,T)) \subset [-L, L]$), dann ist das Residuum auf den Umgebungen der Punkte $k = \pm k_0$ der formalen Ordnung $\varepsilon^{3/2}$. Zeige dann, dass in der L^1-Norm (in Fourier-Variablen) über diese Umgebungen das Residuum aber wieder $O(\varepsilon^{5/2})$ ist. Deswegen ist auch die Supremum-Norm der inversen Fourier-Transformation dieser Residuum-Teile $O(\varepsilon^{5/2})$.

(c) Wie kann man den Ansatz in den Fouier-Variablen erweitern, sodass das Residuum auch auf den Umgebungen der Punkte $k = \pm 3k_0$ klein ist?

Hinweis: Addiere zum Ansatz einen passenden Term der formalen Ordnung $\varepsilon^{3/2}$.