Tomáš Dohnal
tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de

Blatt 1

wird besprochen: in der Woche 28.10.-1.11.2013

Problem 1: Zeige, dass die Energie $\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_t u)^2 + c^2|\nabla u|^2 dx$ eine Erhaltungsgrösse ist für klassische $C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ Lösungen der Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n$ mit Anfangsdaten mit kompaktem Träger.

Problem 2: Beweise folgenden einfachen Teil des Satzes von Paley-Wiener.

Falls $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und supp$f \subset \Omega$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt, dann ist $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-\mathrm{i}k\cdot x}dx$ holomorph auf $\mathbb{C}^n$.

Hinweis: Mit Hilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz zeige, dass Differenzierung unter dem Integral erlaubt ist und zeige, dass $\partial_{\overline{k_m}}\hat{f} = 0$ für alle $m = 1,..,n$.

Problem 3:

(i) Für die Funktion $\hat{W}(k) = \frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}$ mit $k \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R}$ zeige, dass ihre inverse Fourier-Transformation die Distribution W, definiert durch

$$W(\psi) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|x|=ct}\psi(x)dx \qquad \forall \psi \in S(\mathbb{R}^3),$$

ist.

Hinweis: Verwende (und nachrechne!) die Identität $\int_{|x|=ct} e^{-\mathrm{i}k\cdot x}dx = 4\pi c^2 t\frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}$ in $\mathbb{R}^3$ und verwende die Definition der Fourier-Transformation für Distributionen.

(ii) Mit dem Resultat aus (i) erhalte aus

$$\hat{u}(k,t) = \frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}\hat{g}(k) + \partial_t\left(\frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}\hat{f}(k)\right)$$

die Kirchhoffsche Formel

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|x-y|=ct} g(y)dy + \partial_t\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|x-y|=ct} f(y)dy\right)$$

für die Lösung der Wellengleichung in 3D mit den Anfangsbedingungen $u(x,0) = f(x), \partial_t u(x,0) = g(x)$.

Hinweis: Identität

$$\hat{T}\hat{\phi} = \widehat{T * \phi} \text{ für alle } \phi \in S(\mathbb{R}^3), T \in S'(\mathbb{R}^3),$$

wobei $(T * \phi)(x) := T(\phi(x - \cdot))$.

Problem 4: Zeige, dass die Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = 0$ invariant unter der Lorentz-Transformation $(t,x) \to \left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$ für beliebige $v \in \mathbb{R}$ mit $v^2 < c^2$ ist.