TOMÁŠ DOHNAL
tomas.dohnal@math.tu-dortmund.de

Blatt 2

Abgabe: 11.11.2013

Problem 1: Was sind die Dispersionsrelationen (der linearen Teile) folgender Gleichungen?

(i) Balkengleichung: $\partial_t^2 u + a\partial_x^4 u = 0, \qquad a > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}$

(ii) Kadomtsev-Petviashvili-Gl.: $\partial_{x_1}(\partial_t u + \partial_{x_1}^3 u + u\partial_{x_1} u) + \partial_{x_2}^2 u = 0, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}^2$

(iii) Wärmeleitungsgleichung: $\partial_t u = \Delta u, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}^n$

(iv) Coupled-Mode-Gleichungen:

$$\mathrm{i}(\partial_t u + \partial_x u) + \kappa v + (|u|^2 + 2|v|^2)u = 0 \tag{0.1}$$

$$\mathrm{i}(\partial_t v - \partial_x v) + \kappa u + (|v|^2 + 2|u|^2)v = 0 \tag{0.2}$$

$$\tag{0.3}$$

mit $\kappa > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}$

(v) Camassa-Holm-Gleichung: $\partial_t u + 2\kappa\partial_x u - \partial_t\partial_x^2 u + 3u\partial_x u = 2\partial_x u\partial_x^2 u + u\partial_x^3 u, \qquad \kappa > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}$

- Für (i),(iv) und (v) zeichne qualitativ die Lösung nach einer langen Zeit, falls die Anfgansdaten ein lokaliserter Impuls sind.

- Welche Wellenzahlen wandern für (ii) in der Richtung $(1,0)^T$ (Osten), $(-1,0)^T$ (Westen) und welche in der Richtung $(-1,1)^T$ (Süd-Westen)?

Problem 2: Für das System

$$\begin{aligned} \partial_t u &= Q(\partial_x)u, \qquad u(x,t) \in \mathbb{C}^m, x \in \mathbb{R}, t > 0. \\ u(\cdot,0) &= u_0 \in L^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

mit einem Polynom $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{m\times m}, m \in \mathbb{N}$ berechne die Asymptotik niedrigster Ordnung für $t \to \infty, x/t = c \in \mathbb{R}$ unter der Voraussetzung, dass für alle $k \in \mathbb{R}$ ist $Q(\mathrm{i}k)$ diagonalisierbar, hat imaginäre Eigenwerte $-\mathrm{i}W_j(k), j = 1,\dots,m$ und

$$W_j''(k) \neq 0 \quad \text{für alle } k \text{ mit } W_j'(k) = c \quad \text{und alle} \quad j = 1,\dots,m.$$

Hinweis: Verallgemeinere das Resultat für $m = 1$ aus der Vorlesung.

Problem 3: Für das Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u &= Q(\partial_x)u, \qquad u(x,t) \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(\cdot,0) &= u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

mit einem Polynom $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ berechne die Asymptotik niedrigster Ordnung für $t \to \infty, x/t = c \in \mathbb{R}$ unter der Voraussetzung, dass die Dispersionsrelation

$$W''(k) = 0, W'''(k) \neq 0 \quad \text{für alle } k \text{ mit } W'(k) = c$$

erfüllt.

Hinweis: Methode der stationären Phase, Cauchy-Integralsatz.

Problem 4: Betrachte die lineare Korteweg-de Vries Gleichung

$$\partial_t u + c\partial_x u + \mu\partial_x^3 u = 0, \qquad c, \mu > 0, x \in \mathbb{R}, t > 0$$

mit Anfangsdaten $u(\cdot, 0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R})$.

Was ist die Asymptotik niedrigster Ordnung von $u(x,t)$ für $x/t = v$ mit

(a) $v = c$

(b) $v < c$

Wie schnell fällt die Amplitude der Lösung ab?