# Blatt 1

Abgabe: bis Freitag 22.4.2016, 12 Uhr
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen im Fach von L. Helfmeier, Raum 631-637)

**Aufgabe 1:** Für die partiellen Differentialgleichungen a)-e) soll jeweils eine Funktion $F:\mathbb{R}^M\to\mathbb{R}^N$, mit geeigneten $M,N\in\mathbb{N}$ gefunden werden, so dass

$$F\big(y,u(y),\partial_{y_1}u(y),\dots,\partial_{y_n}u(y),\partial^2_{y_1}u(y),\partial_{y_1}\partial_{y_2}u(y),...\partial^2_{y_m}u(y),\dots\big)=0$$

gilt, falls $u(y)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist. Weiter soll die Ordung der Differentialgleichung bestimmt werden und es soll geprüft werden, ob es sich um eine lineare Gleichung handelt.

a) Korteweg-deVries-Gleichung: $u_t+6uu_x+u_{xxx}=0$.

b) Biharmonische Gleichung: $\Delta\Delta u=f(x)$ mit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ gegeben.

c) Black-Scholes-Gleichung: $u_t+\frac{1}{2}\sigma^2x^2u_{xx}+rxu_x-ru=0$, wobei $\sigma,r$ gegebene Konstanten sind.

d) Schrödinger-Gleichung: $\mathrm{i}\hbar u_t+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u=V(x)u$ , wobei $\hbar,m$ konstant, $V:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ gegeben.

e) FitzHugh-Nagumo-System: $u_t=\Delta u-u^3+\lambda u-\sigma v,\quad \tau v_t=\alpha\Delta v+u-v$, wobei $\alpha,\lambda,\sigma,\tau$ gegebene Konstanten sind.

***Hinweis****: Zum Beispiel, für die Wärmeleitungsgleichung $u_t-\Delta u=f(x,t)$ mit $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben, kann man $F(a,b_1,\dots,b_n,c):=a-\sum_{j=1}^n b_j-c$ wählen ($M=n+2,N=1$), und die Gleichung ist äquivalent zu $F(u_t,\partial^2_{x_1}u,\dots,\partial^2_{x_n}u,f)=0$. Die Gleichung ist linear und von Ordnung zwei.*

**Aufgabe 2:** Sei $u\in C^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ und $v,w:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$. Zu zeigen ist, dass

a) $\nabla\cdot(\nabla\times u)=0$, $u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

b) $\nabla\times(\nabla u)=0$, $u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

c) $\nabla\times\nabla\times u=\nabla(\nabla\cdot u)-\Delta u$, $v,w:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, wobei $\Delta u=\begin{pmatrix}\Delta u_1\\ \Delta u_2\\ \Delta u_3\end{pmatrix}$

d) $\nabla\cdot(v\times w)=w\cdot(\nabla\times v)-v\cdot(\nabla\times w)$

**Aufgabe 3:** Zeige für $L > 0$ und $k, j \in \mathbb{N}_0$, dass

a) $\int\limits_0^L \cos\left(k\frac{2\pi}{L}x\right)\cos\left(j\frac{2\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} \frac{L}{2}\delta_{jk} & ,(j,k) \neq (0,0) \\ L & ,(j,k) = (0,0) \end{cases}$

b) $\int\limits_0^L \sin\left(k\frac{2\pi}{L}x\right)\cos\left(j\frac{2\pi}{L}x\right)dx = 0 \quad \forall j, k \in \mathbb{N}_0.$

**Aufgabe 4:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit $C^1$-Rand $\partial\Omega$ und äußerem Normalenfeld $\nu$. Es sei $u \in C^2\left(\bar{\Omega}\right)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u =& f \text{ in } \Omega \\ \partial_\nu u =& \psi \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Es ist zu zeigen, dass dann notwendigerweise

$$\int_{\partial\Omega} \psi(x)\ dS(x) = -\int_\Omega f(x)\ dx$$

gelten muss.