Blatt 10

Abgabe: bis Freitag 24.6.2016, 12 Uhr
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen im Fach von L. Helfmeier, Raum 631-637)

Aufgabe 1: (20 P)
Sei $\Omega = (0,\pi)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Bestimme die Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) &= 2\cos(x_1), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \partial_{x_1} u(x,t) &= 0, \quad x \in \{0\} \times [0,\pi] \cup \{\pi\} \times [0,\pi], t \in [0,\infty), \\ \partial_{x_2} u(x,t) &= 0, \quad x \in [0,\pi] \times \{0\} \cup [0,\pi] \times \{\pi\}, t \in [0,\infty), \\ u(x,0) &= 1, \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

wobei $x = (x_1, x_2)$.

Aufgabe 2: (22 P)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand, $T > 0$, Ω_T der zugehörige parabolische Zylinder und $u \in C^2(\overline{\Omega_T})$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \end{aligned}$$

Definiere $E(t) := \int_\Omega u^2(x,t)\,\mathrm{d}x$. Zeige folgende Aussagen:

(a) $E'(t) \leq 0,\ E''(t) \geq 0,\ E'(t)^2 \leq E(t)E''(t) \quad \forall t > 0.$

(b) $f(t) := \log E(t)$ ist konvex auf $\{t > 0 : E(t) > 0\}$.

(c) $E(t) \geq E(0)e^{f'(0)t} \qquad \forall t > 0.$
Insbesondere fällt E höchstens exponentiell ab, falls $E(0) > 0$.

(d) Falls die Lösung u zusätzlich für alle $(x,t) \in \Omega \times \{T\}$ verschwindet, dann ist $u = 0$ in Ω_T.

Aufgabe 3: (28 P)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $T > 0$ und Ω_T der zugehörige parabolische Zylinder. Die Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega_T})$ genüge der Ungleichung

$$\partial_t u - \Delta u \geq 0 \qquad \text{in } \Omega_T.$$

Zeige, dass für alle $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ und $r \in (0, \sqrt{4\pi t_0})$ so klein, dass die Wärmekugel $E(x_0, t_0, r) \subset \Omega_T$, gilt

$$u(x_0, t_0) \geq \frac{1}{4r^n} \int_{E(x_0,t_0,r)} u(y,s) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2}\,\mathrm{d}(y,s).$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4: (30 P) (Nichteindeutigkeit der Wärmeleitungsgleichung)
Definiere

$$u(x,t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{2k!} x^{2k}, \quad x \in R, t \in [0,\infty)$$

für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(t) := \begin{cases} e^{-t^{-2}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Zeige, dass $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ und u löst

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \partial_x^2 u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Warum widerspricht dies nicht dem Eindeutigkeit-Satz (Korollar 3.9)? Argumentiere in jedem Fall, warum Reihe und Ableitung vertauscht werden dürfen.

Hinweis: *Nutze, dass ein $\theta > 0$ existiert, so dass $|g^{(k)}(t)| \leq \frac{k!}{(\theta t)^k} e^{-\frac{1}{2}t^{-2}}$ für alle $t > 0$.*