Blatt 11

Abgabe: bis Freitag 1.7.2016, 12 Uhr
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen im Fach von L. Helfmeier, Raum 631-637)

Aufgabe 1: (30 P)
Sei $u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und sei $u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t)u_0(y)\,\mathrm{d}y,$$

die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfagsdaten u_0.

(a) Zeige, dass eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass

$$\|\partial_t u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le ct^{-1}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad \|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le ct^{-1/2}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $t > 0$.

(b) Zeige, dass falls zusätzlich $\mathrm{supp}(u_0)$ kompakt ist, dann gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le ct^{-n/2}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $t > 0$.

Aufgabe 2: (25 P)
Sei u die $C^{2,2}(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$-Lösung der homogenen Wellengleichung in $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$ mit Anfangsdaten $u(x,0) = g(x), \partial_t u(x,0) = h(x)$, wobei $g \in C^3(\mathbb{R}^3, h \in C^2(\mathbb{R}^3))$ und g, h einen kompakten Träger haben. Zeige, dass es eine Konstante $c = c(g,h) > 0$ gibt, so dass

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \le ct^{-1}$$

für alle $t > 0$.

Aufgabe 3: (18 P)
Seien $c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^n$ und $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Finde eine explizite Darstellung der Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + b \cdot \nabla u(x,t) + cu(x,t) = 0, &\quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), &\quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Hinweis: *Transformation zu Variablen $y := x - bt, \tau := t$.*

Bitte wenden!

Aufgabe 4: (27 P)

Sei u eine Lösung der Wellengleichung in $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ der Form $u(x,t) = v(|x|,t)$, wobei $v \in C^2([0,\infty) \times [0,\infty))$. Eine solche Lösung u heißt sphärische Welle.

(a) Zeige, dass $v = v(r,t)$ die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung $\left(\partial_t^2 v - \partial_r^2 v - \frac{n-1}{r}\partial_r v = 0\right)$ erfüllt.

(b) Welche Gleichung erfüllt $\tilde{v}(r,t) := v(r,t)r^{\frac{n-1}{2}}$?

(c) Im Fall $n = 3$ finde eine allgemeine Lösungsformel für sphärische Wellen.

(d) Im Fall $n = 3$ und $t < r$ finde die sphärischen Wellen, die die Anfgansbedinung $u(r,0) = \phi(r), \partial_t u(r,0) = \psi(r), r > 0$ erfüllen, wobei $\phi, \psi \in C^2((0,\infty))$.