# Blatt 12

Abgabe: bis Freitag 8.7.2016, 12 Uhr
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen im Fach von L. Helfmeier, Raum 631-637)

**Aufgabe 1: (32 P)**
Sei $\Omega := (0, \pi)$.

(a) Für $k \in \mathbb{N}, \omega \in \mathbb{R}$ bestimme mit Hilfe der Eigenfunktion-Entwicklung-Methode die Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) &= \sin(kx)\sin(\omega t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x), \partial_t u(x,0) &= h(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

wobei $g, h \in C^1(\Omega)$ und $g(0) = g(\pi) = h(0) = h(\pi) = 0$.

Was passiert für $\omega = k$?

(b) Bestimme mit Hilfe der Eigenfunktion-Entwicklung-Methode die Lösung der gedämpften homogenen Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) + r\partial_t u(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x), \partial_t u(x,0) &= h(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

wobei $r \in (0,2)$, $g, h \in C^1(\Omega)$ und $g(0) = g(\pi) = h(0) = h(\pi) = 0$.

**Aufgabe 2: (20 P)**
Sei $u$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung in $\mathbb{R}$ mit Anfangsdaten $u(x,0) = g(x), \partial_t u(x,0) = h(x)$, wobei $g, h \in C^2(\mathbb{R})$ einen kompakten Träger haben. Zeige, dass es ein $T > 0$ gibt, so dass für $t > T$ die kinetische und potentielle Energie gleich sind, d.h.

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_t u(x,t))^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(x,t))^2 \,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } t > T.$$

**Aufgabe 3: (25 P)**
Sei $g \in C^1([a,b])$ mit $g'(x) < 0$ für $x \in [a,b]$ gegeben. Betrachte folgendes Anfangswertproblem mit Anfangsdaten an der Kurve $\Gamma := \{(x, g(x)) : x \in (a,b)\}$.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial_x \partial_y}(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in (a,b) \times (g(a), g(b)), \\ &u(x, g(x)) = U(x),\ \partial_x u(x, g(x)) = U_1(x),\ \partial_y u(x, g(x)) = U_2(x) \quad x \in (a,b), \end{aligned}$$

wobei $f \in C(\mathbb{R}^2), U \in C^1([a,b]), U_1, U_2 \in C([a,b])$ und $U'(x) = U_1(x) + g'(x)U_2(x)$ für alle $x \in [a,b]$.
Finde eine Integraldarstellung der Lösung und zeige die Eindeutigkeit.

**Aufgabe 4: (23 P) (Zusammenhang zwischen Lösungen der Wellengleichung und der Wärmeleitungsgleichung)**
Sie $u$ eine $C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$-Lösung der Wellengleichung in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ mit Anfangsdaten

$$u(x,0) = g(x),\ \partial_t u(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei der Träger von $g$ kompakt ist. Zeige, dass

$$v(x,t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{s^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} u(x,s)\,\mathrm{d}s$$

die Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ mit Anfangsdaten $v(x,0) = g(x)$ darstellt.
Rechtfertige jedes Vertauschen von Grenzübergängen.

**Hinweis:** *Durch eine passende Spiegelung kann $u$ zu einer $C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$-Lösung der Wellengleichung fortgesetzt werden.*