TOMÁŠ DOHNAL
LISA HELFMEIER

Blatt 13

Abgabe: bis Freitag 15.7.2016, 12 Uhr

(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen im Fach von L. Helfmeier, Raum 631-637)

Aufgabe 1: (20 P)
Bestimme für die Burgers-Gleichung $\partial_t u + u\partial_x u = 0, (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ mit den stetigen aber nicht stetig differenzierbaren Anfangsdaten

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x/x_0, & x \in (0,x_0) \\ 1, & x \geq x_0 \end{cases}$$

die explizite Lösung mit Hilfe der Methode der Charakteristiken. Zeige, dass sie auf zwei Linien in der Raumzeit nicht stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 2: (25 P)
Betrachte die Burgers-Gleichung $\partial_t u + u\partial_x u = 0, (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ mit den Anfangsdaten

$$u(x,0) = u_0(x) = \sin(x).$$

Bis zu welcher Zeit gibt es eine klassische Lösung des Problems? Bestimme mit Hilfe der Rankine-Hugoniot-Bedingung eine Schocklösung für alle $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$. Es reicht die Lösung auf $[0,2\pi] \times (0,\infty)$ zu bestimmen. Ist dies die eindeutige zulässige Schock-Lösung?
Hinweis: *Zulässige Schock-Lösungen werden in der Vorlesung erst am 11.7. definiert.*

Aufgabe 3: (30 P) (Modell für den Autobahn-Verkehrsfluss)
Sei $u = u(x,t)$ die Dichte von Autos auf einer Autobahn um den Punkt x (die Autobahn wird durch x parametrisiert) zur Zeit t. Die Geschwindigkeit eines Autos sei maximal $c_{\max}$. Da typischerweise die Geschwindigkeit der Autos bei einer größeren Dichte geringer ist, modellieren wir die Geschwindigkeit durch $c(u) = c_{\max}\left(1 - \frac{u}{u_{\text{jam}}}\right)$. Der Fluss ist Autodichte mal Autogeschwindigkeit, also $f(u) = uc(u)$. Betrachte jetzt das Problem

$$\partial_t u + \partial_x[f(u)] = 0$$

mit Anfangsdaten u_0 von der Form $u_0(x) = u_l$ für $x \leq 0$ und $u_0(x) = u_r$ für $x > 0$ (sog. Riemann-Problem).

(a) Löse das Problem für $u_r = u_{\text{jam}}$ (und $u_l \in (0, u_r)$).

(b) Löse das Problem für $u_l = u_{\text{jam}}/4$ und $u_r = u_{\text{jam}}/2$.

Mit welcher Geschwindigkeit wandert jeweils das Stauende?

Bitte wenden!

Aufgabe 4: (25 P)

Betrachte die Erhlatungsgleichung $\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0$ mit f glatt. Für eine Schocklösung mit dem Sprung $[u] = u_r - u_l$ und mit $\lambda := (f(u_r) - f(u_l))/[u]$ heißen

$$f'(u_l) > \lambda > f'(u_r)$$

die *Lax-Schock-Ungleichungen* und

$$\frac{f(v) - f(u_l)}{v - u_l} \geq \lambda \text{ für alle } v \in /u_l, u_r/$$

die *Oleinik-Schock-Ungleichungen*. Hier ist $/a, b/ := [a, b]$, falls $a < b$ und $/a, b/ := [b, a]$, falls $a > b$.

(a) Zeige, dass die Oleinik-Ungleichungen äquivalent sind zu

$$\frac{f(v) - f(u_r)}{v - u_r} \leq \lambda \text{ für alle } v \in /u_l, u_r/.$$

(b) Zeige, dass für f konvex die Oleinik-Ungelichungen die Lax-Ungleichungen implizieren.