Blatt 2

Abgabe: bis Freitag 29.4.2016, 12 Uhr
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen im Fach von L. Helfmeier, Raum 631-637)

Aufgabe 1: (25P)

(a) Für ein $L > 0$ sei $f \in C([0, L], \mathbb{R}$ stückweise C^1. Zeige mit Hilfe der Sätze aus der Vorlesung, dass dann die Kosinusreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \cos\left(k\frac{\pi}{L}x\right) \quad \text{mit } a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(k\frac{\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x$$

gleichmäßig gegen f auf $[0, L]$ konvergiert.

(b) Bestimme für $f \in C([0, L], \mathbb{R})$ stückweise C^1 durch Eigenfunktionentwicklung die Lösung der eindimensionalen Poisson-Gleichung mit homogenen Neumann-Randdaten

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad x \in (0, L) \\ u'(x) &= 0, \quad x \in \{0, L\}. \end{aligned}$$

Argumentiere, dass $a_0 = 0$ in der Entwicklung von f nötig für die Existenz einer Lösung ist.

Aufgabe 2: (20P) Der Laplaceoperator in $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten
Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Man betrachte in Polarkoordinaten $\Phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \to (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ die Funktion $\tilde{u} := u \circ \varphi$ mit $\tilde{u}(r, \varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Zeige die Darstellung

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\tilde{u}(r, \varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\tilde{u}(r, \varphi)$$

des Laplaceoperators für $x = \Phi(r, \varphi)$ und $r > 0$.

Aufgabe 3: (35P) Das Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung auf der Einheitsscheibe $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$

Betrachte für eine Funktion $h \in C^1(\partial B_1(0))$

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= 0, \quad x \in B_1(0) \\ u(x) &= h(x), \quad x \in \partial B_1(0) \end{aligned}$$

und bestimme die Lösung mit Hilfe von Separation der Variablen.

Hinweise:

1. *Schreibe das Problem in Polarkoordinaten (r, φ) um.*

2. *Im Seprationsansatz $R(r)\Phi(\varphi)$ sind Φ und Φ' 2π-periodische Funktionen (da φ Winkelkoorinate).*

3. *Die Euler-Gleichung $r^2R''(r) + rR'(r) - k^2R(r) = 0$ hat für $r > 0$ und mit $k \in \mathbb{N}$ folgende Lösungen:*

$$R(r) = \begin{cases} \alpha + \beta \log(r) \text{ für } k = 0 \\ \alpha r^k + \beta r^{-k} \text{ für } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ frei. Argumentiere, dass in beiden Fällen $\beta = 0$ für R aus der Lösung der Laplace-Gleichung ist.

Aufgabe 4: (20P) Invarianz des Laplaceoperators unter orthogonalen Variablentransformationen

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Zeige, dass

$$\Delta(u \circ T)(x) = \Delta u(Tx) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

falls $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix ist.