Blatt 5

Abgabe: bis Freitag 20.5.2016, 12 Uhr
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen im Fach von L. Helfmeier, Raum 631-637)

Aufgabe 1: (15 P) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $a \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ mit $a(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$.

(a) Zeige, dass das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u + au &= 0, \text{ in } \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

nur die trivilae Lösung besitzt.

(b) Zeige, dass das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u + au &= 0, \quad \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u &= 0, \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei ν der äußere Normaleneinheitsvektor an $\partial\Omega$ ist, nur die triviale Lösung besitzt, falls a in mindestens einem Punkt in Ω positiv ist. Welche nichttriviale Lösungen gibt es, falls $a \equiv 0$?

Hinweis: *Teste die Gleichungen mit einer passenden Funktion. (Testen bedeutet das Multiplizieren der Gleichung mit einer Funktion und das Integrieren über Ω.)*

Aufgabe 2: (15 P)
Zeige, dass eine in $\mathbb{R}^n$ harmonische Funktion $u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ notwendigerweise die Nullfunktion ($u \equiv 0$) ist.

Hinweis: *Mittelwerteigenschaft und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.*

Aufgabe 3: (25 P)

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $q \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ und $\phi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$. Angenommen die Funktionen $u_1, u_2 \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ erfüllen

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &\leq q \quad \text{in } \Omega, & \qquad -\Delta u_2 &\geq q \quad \text{in } \Omega, \\ u_1 &\leq \phi \quad \text{auf } \partial\Omega, & u_2 &\geq \phi \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

zeige, dass $u_1 \leq u_2$ in $\overline{\Omega}$.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, so dass $\Omega \subset B_R(x_0)$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $R > 0$. Außerdem seien $q \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ und $\phi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$ und u eine klassische Lösung von

$$-\Delta u = q \text{ in } \Omega, u = \phi \text{ auf } \partial\Omega.$$

Zeige, dass dann für alle $x \in \overline{\Omega}$ gilt, dass

$$m + \frac{k}{2n}(R^2 - |x - x_0|^2) \leq u(x) \leq M + \frac{K}{2n}(R^2 - |x - x_0|^2),$$

wobei

$$m := \min_{x \in \partial\Omega} \phi(x),\ M := \max_{x \in \partial\Omega} \phi(x),\ k := \min_{x \in \overline{\Omega}} \{q(x), 0\},\ K := \max_{x \in \overline{\Omega}} \{q(x), 0\}.$$

Aufgabe 4: (30 P)
Sei $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(0)}$ für ein $R > 0$ und $u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ harmonisch in Ω.

(a) Angenommen $\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0$, zeige dass

$$\sup_{\Omega} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

(b) Ohne die Bedingung $\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0$ gilt das obige Maximumprinzip nicht. Finde eine Beispielfunktion, die dies bestätigt.

Hinweis zu (a): *Betrachte die zwei Fälle $K := \max_{\partial\Omega} |u| > 0$ und $K = 0$. Für den ersten Fall untersuche den Ring $B_{\tilde{R}}(0) \setminus \overline{B_R(0)}$, der so gewählt ist, dass $|u| < K$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_{\tilde{R}}(0)$.*

Aufgabe 5: (15 P)
Formuliere und beweise die stetige Abhängigkeit von den Daten (also von h) für das Randwertproblem

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \qquad u = h \text{ auf } \partial\Omega$$

für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen beschränkt und $h \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$.

Bemerkung: In der Vorlesung wurde bereits die Eindeutigkeit der Lösung gezeigt. Zusammen mit der Existenz (kommt noch in der Vorlesung - mit zusätzlicher Bedingung an $\partial\Omega$) erhalten wir also mit der stetigen Abhängigkeit von den Daten ein Wohlgestelltheitsresultat für das Dirichletproblem.