INSTITUT FÜR ANALYSIS — TOMÁŠ DOHNAL
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND — LISA HELFMEIER
KLASSISCHE THEORIE DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN — SOSE 16

Blatt 6

Abgabe: bis Freitag 27.5.2016, 12 Uhr
(Abgabe alleine oder in Zweiergruppen im Fach von L. Helfmeier, Raum 631-637)

Aufgabe 1: (25 P) (Poisson-Gleichung auf dem Ganzraum)
Betrachte für $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ die Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass jede beschränkte klassische Lösung die Form $u = \Phi * f + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ hat.

Man sollte sich erst überzeugen, dass das Resultat nicht direkt aus den in der Vorlesung bewiesenen Sätzen (Satz 2.5, Greensche Funktion, Eindeutigkeit, ...) folgt.

Vorschlag: *Zeige, dass* $\partial_{x_j}(u - \Phi * f) = 0$ *für jedes* $j \in \{1, \dots, n\}$. *Benutze eine Abschätzung für Ableitungen harmonischer Funktionen.*

Aufgabe 2: (30 P)

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Beweise:

  (i) Falls u harmonisch in Ω, dann ist $f(u)$ subharmonisch in Ω.

  (ii) Falls u subharmonisch in Ω und f monoton wachsend, dann ist $f(u)$ subharmonisch in Ω.

(b) Bestimme für die Funktion $|x|^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche α die Funktion subharmonisch bzw. superharmonisch auf $B_1(0) \setminus \{0\}$ ist.

Tipp zu (a): *Nutze die Jensen'sche Ungleichung*

Aufgabe 3: (20 P) (Hinreichende Bedingung für Superharmonizität)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein berschränktes Gebiet und $u \in C(\overline{\Omega})$ erfülle $u \geq T_{x_0,R}(u)$ in jedem Ball $B_R(x_0)$ mit $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$. Folgere, dass u superharmonisch in Ω ist.
Dabei ist $T_{x_0,R}(u)$ die harmonische Liftung, die in der Vorlesung definiert wurde.

Aufgabe 4: (25 P) (Konvergenzsatz von Weierstrass)
Zeige den folgenden Satz:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein berschränktes Gebiet und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ eine Folge harmonischer Funktionen in Ω. Falls $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $\partial\Omega$ konvergiert, dann konvergiert $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$ gegen ein $u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ harmonisch in Ω.

Hinweis: *Zeige für die gleichmäßige Konvergenz auf* $\overline{\Omega}$, *dass* $(u_k)_k$ *eine Cauchy Folge bezüglich der Supremumsnorm in* $\overline{\Omega}$ *ist.*